

**Magnetohydrodynamische Stabilität
und Grundschrwingungen
von Sonnenprotuberanzen im Rahmen
zweidimensionaler Gleichgewichtsmodelle**

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
JESÚS GALINDO TREJO
aus
Zacatlán/Mexiko

Bochum 1984

**Magnetohydrodynamische Stabilität
und Grundschwingungen
von Sonnenprotuberanzen im Rahmen
zweidimensionaler Gleichgewichtsmodelle**

DISSERTATION
zur
Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Abteilung für Physik
und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von
JESÚS GALINDO TREJO
aus
Zacatlán/Mexiko

Bochum 1984

Dissertation eingereicht am ...26.1.1984.....
Tag der mündlichen Prüfung ...17.4.1984.....
Referent ...Prof. Dr. K. Schindler
Korreferent ...Prof. Dr. K. Elsässer.

Tonatiuh quauhtleuamitl, xiuhpilli, teotl
tona, tlanextia, motonameyotia.

Die Sonne ist der Adler mit den feurigen Pfeilen,
des Jahres Herr und Gott.
Sie scheint, glänzt und strahlt.

(Aztekischer Vers um 1519)

para Esther



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546407_0032

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die Stabilitätseigenschaften und Grundschrwingungen ruhender Sonnenprotuberanzen mit Hilfe des MHD-Energieprinzips. Unsere Arbeit stellt die erste vollständige Stabilitätsanalyse zweidimensionaler Gleichgewichtsmodelle ruhender Protuberanzen dar. Bisher wurden nur eingeschränkte Verschiebungsklassen betrachtet und Methoden benutzt, die nur auf spezifische Modellarten anwendbar sind. Unser Stabilitätsformalismus behandelt dagegen zweidimensionale Modelle in einheitlicher Form. Wir untersuchen vier isotherme Gleichgewichtsmodelle für Protuberanzen (Menzel, 1951; Dungey, 1953; Kippenhahn-Schlüter, 1957; Lerche-Low, 1980).

Einen Teil der von uns erzielten Stabilitätsaussagen gewinnen wir auf analytischem Wege. Im Fall des Kippenhahn-Schlüter-Modells ist es uns gelungen, dessen Stabilität gegen beliebige dreidimensionale Verschiebungen analytisch zu beweisen. Die übrigen Gleichgewichte sind bei Abwesenheit einer Magnetfeldkomponente längs der Protuberanzachse stabil gegen zweidimensionale Verschiebungen, die entlang der Protuberanzachse gerichtet sind.

Um allgemeinere Verschiebungsklassen betrachten zu können, haben wir ein umfangreiches numerisches Verfahren entwickelt, das auf der Diskretisierung mit finiten Elementen basiert. Neben qualitativen Stabilitätsaussagen liefert das Verfahren bei Instabilität die größte Anwachsrate sowie die Frequenz der Grundschrwingungen stabiler Systeme. Das Verfahren wurde durch Anwendung auf einfache Systeme, deren dynamische Eigenschaften bekannt sind, erfolgreich getestet.

Wir finden Stabilität für alle Modelle in dem für ruhende Einzelprotuberanzen realisierten Parameterbereich. Alle vier Modelle beschreiben in diesem Parameterbereich ziemlich gut die betrachteten horizontalen Schwingungen in ruhenden Protuberanzen. Unsere Stabilitätsaussagen gelten natürlich nur im Rahmen der Gültigkeit der Gleichgewichtsmodelle, so daß Störungen auf der Längenskala des äußeren Magnetfeldes nicht berücksichtigt sind. Alle übrigen Störungen, insbesondere diejenigen mit einer Längenskala vergleichbar mit der Dicke der Protuberanz, sind dagegen richtig beschrieben. Die untersuchten isothermen Modelle erklären in diesem Gebiet relativ gut die globalen Grundzüge der Protuberanz.

Wir betrachten für zwei der Modelle (Dungey und Menzel) auch den Fall von Doppelprotuberanzen. Während die Doppelprotuberanz beim Dungey-Modell im für Sonnenprotuberanzen relevanten Parameterbereich ebenfalls horizontale Schwingungen ausführt, tritt beim Menzel'schen Modell Instabilität auf. Ihre Polarisierung sowie die Anwachsrate können jedoch das explosionsartige Ende, d.h. die *disparition brusque*, der Doppelprotuberanz nicht erklären. Unsere Ergebnisse sind daher konsistent mit den Untersuchungen anderer Autoren, nach denen die *disparition brusque* in der ruhenden Protuberanz nicht durch ideale MHD-Instabilitäten verursacht werden kann.

Wir haben auch Parameterbereiche untersucht, die außerhalb des in Sonnenprotuberanzen realisierten Parameterbereiches liegen. Wir finden, abgesehen vom Kippenhahn-Schlüter-Modell, ein teilweise instabiles Verhalten aller Modelle. Die Instabilitäten der Gleichgewichtskonfigurationen, die geschlossene Feldlinien enthalten (Dungey und Lerche-Low), verhalten sich analog zu kink-Pinchinstabi-

litäten, wobei eine destabilisierende Wirkung der Gravitationseffekte hinzukommt. Die von uns erhaltenen Instabilitäten weisen gleichzeitig typische Eigenschaften verschiedener MHD-Instabilitäten auf (z.B. krümmungsgetriebene Austauschinstabilität, Rayleigh-Taylor-Instabilität, usw.). Andererseits ist eine eindeutige Zuordnung der Instabilitäten in so komplexen Plasmasystemen wie Sonnenprotuberanzen zu den oft diskutierten Instabilitätsprototypen in vereinfachten Situationen offensichtlich nicht mehr möglich.

Das entwickelte Verfahren ist nicht auf Protuberanzmodelle beschränkt, sondern es kann auf jedes ein- oder zweidimensionale statische MHD-Gleichgewicht angewandt werden.

Ich danke herzlich Herrn Prof. Dr. K. Schindler für seine stets hilfsbereite Betreuung und seine Anregungen zu dieser Arbeit. Die zahlreichen wertvollen Diskussionen mit ihm haben wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Dr. L. Janicke möchte ich für hilfreiche Diskussionen während der Einführungsphase dieser Arbeit danken.

Die Herren Dr. W. Seboldt, Dipl.-Phys. W. Zwingmann und M. Kießling haben bei der Durchsicht des Manuskriptes mit kritischen Hinweisen zu der Abfassung dieser Arbeit beigetragen. Frau C. Krämer hat die sorgfältige Reinschrift des Manuskriptes angefertigt. Ihnen allen danke ich sehr.

Ich danke besonders dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für das Studienstipendium, das die Durchführung dieser Arbeit in der Bundesrepublik Deutschland möglich machte.

Inhalt

I.	Einleitung	1
1.	Ruhende Sonnenprotuberanzen und ihre Umgebung	1
2.	Bisher vorliegende Resultate zur Stabilität ruhender Protuberanzen	7
3.	Problemstellung	16
II.	Allgemeine theoretische Grundlagen	18
1.	Grundgleichungen der MHD	18
2.	Zweidimensionale MHD-Gleichgewichte	21
3.	MHD-Stabilitätstheorie	24
3.1	Die Normalmoden-Analyse	25
3.2	Das Energieprinzip der idealen MHD	29
3.3	Spezialisierung des MHD-Energieprinzips für zweidimensionale Gleichgewichte	32
III.	Gleichgewichtsmodelle ruhender Sonnenprotuberanzen	35
1.	Modell von Menzel	35
2.	Modell von Dungey	39
3.	Modell von Kippenhahn und Schlüter	44
4.	Modell von Lerche und Low	47
IV.	Stabilitätsanalyse	52
1.	Analytische Auswertung des Energieprinzips	52
1.1	Isotherme Atmosphäre in einem homogenen Magnetfeld	53
1.2	Protuberanzmodell von Kippenhahn und Schlüter als Sonderfall einer allgemeinen Gleichgewichtsklasse	53
1.3	Analytische Stabilitätsaussagen für Protuberanzmodelle bei speziellen Verschiebungen	58
1.3.1	Modell von Dungey	58
1.3.2	Modell von Menzel	60
1.3.3	Modell von Lerche und Low	62

2.	Numerische Auswertung des Energieprinzips für verschiedene Protuberanzmodelle	64
2.1	Modell von Kippenhahn und Schlüter	65
2.1.1	Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen	65
2.1.2	Andere Parameterbereiche	68
2.2	Modell von Dungey	76
2.2.1	Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen	77
2.2.2	Andere Parameterbereiche	80
2.3	Modell von Menzel	94
2.3.1	Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen	95
2.3.2	Andere Parameterbereiche	100
2.4	Modell von Lerche und Low	114
2.4.1	Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen	115
2.4.2	Andere Parameterbereiche	119
V.	Diskussion und Schlußfolgerungen	134
Anhang A	Das numerische Verfahren	145
Anhang B	Tests zum numerischen Verfahren	148
	B.1 MHD-Wellen im homogenen Plasma	148
	B.2 Plasmaschicht-Gleichgewicht	155
	B.3 Schallwellen im Gravitationsfeld	163
Anhang C	Die Eigenwertgleichung	167
	C.1 Abkopplung der Gleichungen in Sonderfällen	167
	C.2 Entartung im Energieprinzip	171
Literatur		172

I. Einleitung

1. Ruhende Sonnenprotuberanzen und ihre Umgebung

In der Sonnenatmosphäre ereignen sich Phänomene, die aus plasmaphysikalischer Sicht von großem Interesse sind, im besonderen, weil man dort das Plasma in einem in irdischen Labors nicht reproduzierbaren Zustand antrifft. Ferner gibt es dort Prozesse, die in anderen weiter entfernten astrophysikalischen Objekten ebenfalls stattfinden. Die Energiequelle dieser Atmosphäre liegt in der dichten (158 g cm^{-3}) heißen ($1,5 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{K}$) Kernzone der Sonne, wo durch thermonukleare Reaktionen Wasserstoff in Helium umgewandelt wird. Die dabei erzeugte Energie wird durch Strahlung und Konvektion zu den äußeren Regionen der Sonne transportiert. Ein Teil der Konvektionsenergie wird auf die Oberfläche in Form von Wellenenergie übertragen. Dieser Energiestrom führt zu den charakteristischen eindrucksvollen Phänomenen auf der Oberfläche und in der Atmosphäre der Sonne, wie zum Beispiel Sonnenflecken, Protuberanzen, Sonneneruptionen usw. Diese Erscheinungen bestimmen unter anderem die auffallende zeitabhängige Strahlungszunahme sowie die lokale Konzentration des magnetischen Flusses. Die Gebiete, wo solche Veränderungen stattfinden, werden aktive Regionen genannt, im Gegensatz zu den ruhigen Gebieten, in denen ein nahezu stationärer Zustand herrscht.

Innerhalb einer Sonnenfleckengruppe bildet sich gewöhnlich eine Linie, die vertikale Magnetfelder entgegengesetzter Polarität trennt. Das ist die sogenannte magnetische Neutrallinie, in deren Nähe zwei der energiereichsten Aktivitätserscheinungen vorkommen, nämlich die Protuberanzen und die Sonneneruptionen. Die Protuberanzen sind große Plasmakondensationen in der oberen Chromosphäre und/oder in der un-

teren Korona, deren Dichten (Temperaturen) um einige Größenordnungen größer (kleiner) als in der umgebenden Materie sind. Wenn Protuberanzen gegen die Sonnenscheibe beobachtet werden, zeigen sie sich in Absorption als dunkle Filamente. Andererseits erscheinen die Protuberanzen am Sonnenrand als leuchtende Plasmawolken. Die Protuberanzen können weitgehend nach ihren dynamischen Eigenschaften in zwei Klassen eingeteilt werden: ruhende und aktive Protuberanzen.

Die ruhenden Protuberanzen sind relativ dünne, vorhangartige, längliche Gebilde (typische Dimensionen: Dicke $0,4 - 1,5 \cdot 10^4$ km, Höhe $0,15 - 1 \cdot 10^5$ km, Länge $0,6 - 6 \cdot 10^5$ km), die ungefähr senkrecht auf der Sonnenoberfläche stehen (s. Abb. 1). Die Lebensdauer einer

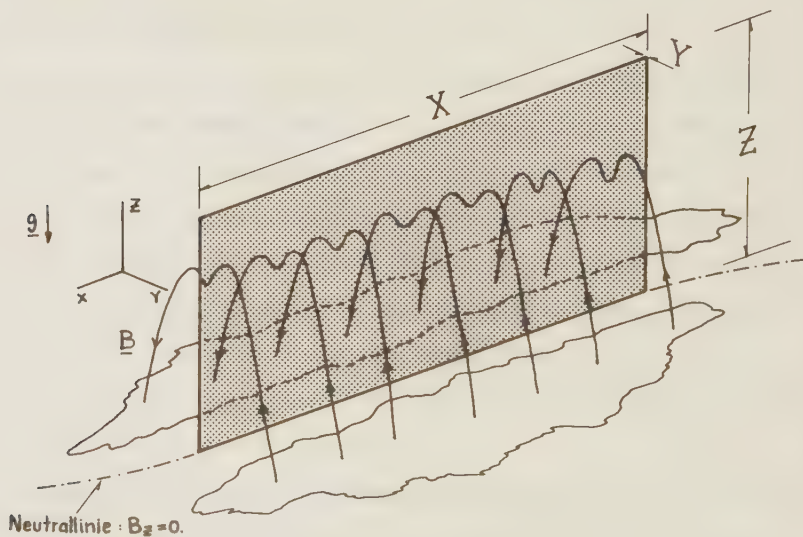


Abb. 1: Ruhende Sonnenprotuberanz, typische Abmessungen:

$$Y = 0,4 - 1,5 \cdot 10^4 \text{ km}, \quad Z = 0,15 - 1 \cdot 10^5 \text{ km},$$

$$X = 0,6 - 6 \cdot 10^5 \text{ km}$$

ruhenden Protuberanz beträgt mehrere Sonnenrotationen, wobei ihre Gestalt im wesentlichen unverändert bleibt. Sie erstrecken sich längs der magnetischen Neutrallinie bipolarer Gebiete in oder zwischen aktiven Regionen. Ruhende Protuberanzen sind dichte (Elektro-
nendichte etwa $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$) kühle (Temperatur etwa 7000° K) Plasmastrukturen, die in magnetohydrostatischem Gleichgewicht mit ihrer Umgebung sind. Die Magnetfeldstärke in ruhenden Protuberanzen liegt in dem Bereich 1 - 10 Gauß; sie zeigt einen vertikalen positiven Gradienten und scheint nicht stark von der Protuberanzlänge abzuhängen (Leroy, 1977). Die Feldlinien verlaufen ungefähr horizontal, parallel zur Sonnenoberfläche, wobei eine relativ starke Komponente des Magnetfeldes längs der Protuberanzachse (in der Regel mehrere Male größer als die Komponente senkrecht zur Protuberanzebene, Leroy, 1978) vorhanden ist. Das Magnetfeld stellt wegen des fehlenden vertikalen hydrostatischen Gleichgewichts die Stütze der ruhenden Protuberanz dar, derart, daß die auf der Sonnenoberfläche verankerten Feldlinien bogenähnliche Strukturen bilden, die die Protuberanz horizontal durchdringen. Das Protuberanzgewicht wirkt so, daß die Feldlinien in der Spitze der Bögen nach unten gezogen werden. Die Lorentzkraft gleicht an dieser Stelle die Schwerkraft aus und damit wird das magnetohydrostatische Gleichgewicht erreicht. Der magnetische Druck komprimiert seitlich das Plasma, was zu dem flächenhaften Aussehen der ruhenden Protuberanz beiträgt.



Ruhende Protuberanzen besitzen eine innere Feinstruktur, die aus annähernd vertikalen feinen, hellen Fäden mit Durchmesser kleiner als 300 km besteht. Die Materie sinkt dauernd (1 km s^{-1}) durch diese Fäden; dabei wird die Form der Protuberanz in großem Maße erhalten. Der aus dieser Strömung resultierende Masseverlust hat zu Folge, daß

die Materie ständig in kurzer Zeit (etwa 5 Minuten) der Protuberanz wieder zugeführt werden muß. Andererseits kann es sich bei diesem Abwärtsfluß weder um Diffusion quer zum Magnetfeld (zu langsam) noch um freien Fall (zu schnell) handeln (Anzer, 1978). Eine Rayleigh-Taylor-Instabilität in der Protuberanz könnte vielleicht diesen Abwärtsfluß erklären (Priest, 1978). In letzter Zeit wurde jedoch eine Aufwärtsströmung ($0,5 \text{ km s}^{-1}$) der Materie in ruhenden Protuberanzen beobachtet (Malherde et al., 1983).

Die Entstehung ruhender Protuberanzen wird zwar als Folge einer thermischen Instabilität des heißen koronalen Plasmas in einem Magnetfeld angenommen (z.B. Kuperus und Tandberg-Hanssen, 1967), aber es wird ebenfalls die Entstehung als Konsequenz der Kondensation der Materie, die entlang der Magnetfeldlinien in bogenartigen Konfigurationen aus der Chromosphäre eingesaugt wird (Pikel'ner, 1971; Priest und Smith, 1979), betrachtet. Bei diesen Vorgängen verursacht das Magnetfeld eine starke Anisotropie der Wärmeleitung; während die Wärmeleitung längs der Feldlinien gleich wie bei nicht Vorhandensein des Feldes ist, wird die Wärmeleitung senkrecht zu den Feldlinien erheblich reduziert. Die Auflösung ruhender Protuberanzen kann auf verschiedene Weise erfolgen. Protuberanzen, die nie ihre volle Entwicklung erreicht haben, verschwinden häufig durch allmähliche Auflösung, indem die Materie mit einer Geschwindigkeit bis 100 km s^{-1} in die Chromosphäre einfällt.

Eine gewöhnliche Phase vielleicht der meisten ruhenden Protuberanzen ist das plötzliche Verschwinden (*disparition brusque*), wobei die ganze Protuberanz mit wachsender Geschwindigkeit (mehrere hundert km s^{-1}) explosionsartig steigt und größtenteils hoch in der Korona verschwindet. Ein Teil der Materie kehrt danach entlang spiral-

förmiger Trajekturen in die Chromosphäre zurück. Nach bestimmter Zeit (von Tagen bis zu einigen Wochen) bildet sich die Protuberanz erneut an demselben Ort und im wesentlichen in derselben Form. Man kann gewissermaßen annehmen, daß das stürzende Magnetfeld während der disparition brusque nicht zerstört sondern nur vorläufig gestört wird. Diese Störung, deren Ursache die Entstehung einer neuen aktiven Region in der Nähe der Protuberanz oder ein naheliegender Flare sein kann, wirkt als Auslöser der Instabilität in der Magnetfeldkonfiguration. Die meisten Protuberanzen in niedrigen solaren Breiten erfahren wenigstens einmal eine disparition brusque, gelegentlich sogar bis zu viermal. Dagegen ist die disparition brusque ein relativ seltenes Ereignis für Protuberanzen in höheren Breiten.

Ruhende Protuberanzen können auf weniger dramatische Weise als bei der disparition brusque durch einen Flare gestört werden, indem sie nämlich gedämpfte Schwingungen ausführen, nach denen sie wieder zu einem stabilen Zustand gelangen. Die Schwingungen sind vorwiegend horizontal (Kleczeck und Kuperus, 1969) in Richtung des störenden Flares mit einer typischen Periode zwischen 6 und 40 Minuten (Ramsey und Smith, 1966).

Aktive Protuberanzen umfassen eine ganze Klasse unterschiedlicher Strukturen. Sie haben gemeinsam eine kürzere Lebensdauer, schnellere innere Strömung, höhere Temperatur und stärkere Magnetfelder als ruhende Protuberanzen. Einige von ihnen stehen deutlich in starker Beziehung zu Sonnenflecken und Flares.

In die zu Flares assoziierten Bogenprotuberanzen (Loops) fließt die kondensierte Materie aus Höhen bis zu 50000 km längs parallel gekrümmten (Magnetfeld-) Trajektorien, die Regionen zwischen zwei Tei-

len eines Flares oder zwischen einem Flare und einem Sonnenfleck verbinden, hinab. Die Strömung erfolgt für beide Bogenäste abwärts und mit Geschwindigkeiten bis zu 150 km s^{-1} . Ihre Lebensdauer beträgt nur mehrere Stunden und sie können eine Temperatur bis etwa $4 \cdot 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$ erreichen. Die Schleifenprotuberanzen überbrücken in der Regel die magnetische Neutrallinie zweier aktiver Regionen und ihre Magnetfeldstärke kann bis zu 100 Gauß betragen.

Eine andere Gattung aktiver Protuberanzen bilden die Materieausstöße aus chromosphärischen Gebieten. Die sogenannten Surges sind spritzförmige Materiestrahlen, die mit Geschwindigkeiten zwischen 100 und 200 km s^{-1} in kurzer Zeit (10 bis zu 20 Minuten) große Höhen in der Korona (bis etwa $2 \cdot 10^5 \text{ km}$) erreichen. Danach fließt die Materie entlang der aufgestiegenen Bahn in die Chromosphäre zurück. Ihr Entstehungsort liegt in kompakten hellen Flaregebieten nahe an einem Sonnenfleck. Surges sind durch ihr ungefähr radiales Magnetfeld (bis zu 150 Gauß) stark gebündelt.

Die Sprayprotuberanzen sind explosionsartige Materieausstöße aus Flares, die wegen ihrer großen Geschwindigkeit (von 200 bis zu 2000 km s^{-1}) im Vergleich zu den Surges nicht vom Magnetfeld eingeschlossen werden können. Die ausgeströmte Materie wird heftig in Fragmenten ausgespritzt, wobei ein Teil die Sonne verläßt und ein geringer Teil in die Sonnenoberfläche zurückströmt.

Protuberanzen beeinflussen deutlich ihre Umgebung. Oberhalb ruhender Protuberanzen befindet sich eine koronale Region mit reduzierter Helligkeit (cavity), deren Ursache eine Verminderung der Elektronendichte ist. Um die ruhende Protuberanz bildet sich ferner ein System konzentrischer bogenartiger Strukturen mit erhöhter Elek-

tronendichte, das häufig eine längliche helmähnliche Gestalt (helmet streamers) annimmt. Diese Strukturen haben eine Lebensdauer vergleichbar mit der der ruhenden Protuberanzen, sie erstrecken sich bis auf mehrere Sonnenradien oberhalb der Sonnenoberfläche. Wenn eine ruhende Protuberanz in die disparition brusque-Phase eintritt, finden zahlreiche heftige dynamische Vorgänge in der Korona statt. Diese koronalen Reaktionen (transients) äußern sich als Aufhellung, Verschwinden, Expansion oder Zusammenbruch bogenartiger Strukturen oberhalb der Protuberanz. Bei der Expansion werden große Massen mit Geschwindigkeiten bis zu 1000 km s^{-1} in den interplanetarischen Raum herausgestoßen.

Bei großen Flares (two-ribbon-Flares) findet eine anfängliche Aufhellung in chromosphärischen Punkten statt, die auf beiden Seiten der magnetischen Neutrallinie einer aktiven Region liegen, so daß sich zwei H_{α} -Streifen parallel zu dieser Linie bilden. Die ruhende Protuberanz, die auf der Neutrallinie liegt, verschwindet durch disparition brusque beim Flareansatz. Jedoch können two-ribbon-Flares ebenfalls ohne die vorher vorhandene Protuberanz vorkommen.

2. Bisher vorliegende Resultate zur Stabilität ruhender Protuberanzen

Zahlreiche theoretische Modelle haben bislang versucht, die physikalischen Eigenschaften ruhender Protuberanzen korrekt zu beschreiben. Obwohl zuerst einige Modelle aufgestellt wurden, die überhaupt kein Magnetfeld berücksichtigt haben (z.B. de Jager, 1959; Jefferies und Orrall, 1963), hat sich aufgrund einfacher Überlegungen bezüglich der Protuberanzstützung in der Korona herausgestellt, daß man unbedingt das Magnetfeld in die Betrachtungsweise mit einbeziehen

muß (siehe z.B. Tandberg-Hanssen, 1974).

Magnetohydrostatische Modelle nehmen eine ruhende Protuberanz an, die durch den Gasdruckgradienten, die Lorentzkraft und die Schwerkraft in statischem Gleichgewicht gehalten wird. Diese Modelle betrachten ferner eine Zustandsgleichung für das Plasma und behandeln das Problem der Energiebilanz unterschiedlich. Als erste Approximation zu diesem Problem wird die Protuberanz als isotherm vorausgesetzt.

Aus der beobachteten Tatsache, daß ruhende Protuberanzen viel länger als breit sind (s. Abb. 1), setzen die meisten Modelle eine Invarianz aller physikalischen Größen in der Richtung der Protuberanzachse voraus, d.h., hier handelt es sich um zweidimensionale Gleichgewichtsmodelle. Diese Modelle lassen teilweise eine Komponente des Magnetfeldes längs der Protuberanzachse zu.

Eine äußerst wichtige Eigenschaft, die jedes physikalisch realisierbare Modell aufweisen muß, ist die Stabilität gegen kleine Störungen, weil nur so die Langlebigkeit der ruhenden Protuberanzen erklärt werden kann.

Wir werden im Kapitel III die verschiedenen Protuberanzmodelle detailliert erläutern, jedoch soll an dieser Stelle zunächst eine Zusammenfassung der bis jetzt erzielten Resultate zur Stabilität zweidimensionaler Modelle ruhender Protuberanzen erfolgen. Unmittelbar danach werden wir im Zusammenhang mit dieser Problematik unsere Stabilitätsuntersuchung beschreiben.

Um die Diskussion zu erleichtern, definieren wir hier ein Koordina-

tensystem, dessen y-Achse parallel zur Sonnenoberfläche und senkrecht zur Protuberanz steht. Die x-Achse läuft entlang der Protuberanzachse und die z-Achse steht vertikal, senkrecht zur Sonnenoberfläche (s. Abb. 1).

Das erste Modell ruhender Protuberanzen im Rahmen der idealen MHD stammt von Menzel (1951). Brown (1958) hat mit Hilfe des Energieprinzips der MHD (Bernstein et al., 1958) die Stabilitätseigenschaften dieses Modells untersucht. Er hat lediglich zweidimensionale Verschiebungen berücksichtigt. Er fand, daß das Menzel'sche Gleichgewicht gegen rein vertikale (z) Verschiebungen und wahrscheinlich auch gegen rein horizontale (y) Verschiebungen stabil ist. Jedoch sind die folgenden kritischen Punkte in dieser Untersuchung anzumerken. Brown hat seine Testfunktionen so behandelt, als ob sie Eigenfunktionen des assoziierten Eigenwertproblems wären, was nicht der Fall ist. Wenn eine Eigenfunktion eines Systems zur Zeit $t = 0$ vorliegt, bleibt sie für alle Zeiten Eigenfunktion, d.h., wenn man zur Zeit $t = 0$ eine rein horizontale oder vertikale Verschiebung auf das System anwendet, müßte man für $t > 0$ immer nur eine rein horizontale oder rein vertikale Verschiebung haben. Es ist leicht zu zeigen, daß für das zum Menzel'schen Modell assoziierte Eigenwertproblem weder rein horizontale noch rein vertikale Verschiebungen Eigenfunktionen sind. Man erhält im allgemeinen für $t > 0$ eine Verschiebung, die zwei Komponenten aufweist. Um zu allgemeineren Stabilitätsaussagen zu gelangen, sollte man Testfunktionen mit zwei Komponenten berücksichtigen; das führt zu Mischtermen im Energieprinzip, die sowohl horizontale als auch vertikale Verschiebungen enthalten. Brown hat sich außerdem auf einen engen Parameterbereich beschränkt, z.B. hat er für den Maximalwert des Verhältnisses Plasma-
druck zu Magnetdruck in ruhenden Protuberanzen viel zu hohe Werte

angenommen. Zusammenfassend kann man sagen, daß eine endgültige Antwort zur Stabilitätsfrage des Menzel'schen Modells durch die Brown'sche Arbeit ausblieb.

Dungey (1953) hat über sein pinch-ähnliches Gleichgewicht die Meinung geäußert, es sei instabil. Der Pinch zeigt zahlreiche Instabilitäten (s. z.B. Goedbloed und Hagebeuk, 1972), was möglicherweise Hinweise auf die Stabilitätseigenschaften dieses Modells geben kann. Eine ausführliche Stabilitätsuntersuchung des Dungey'schen Modells fehlt bis jetzt in der Literatur.

Kippenhahn und Schlüter (1957) haben zunächst bei Vernachlässigung des Plasmadruckes ein einfaches Modell aufgestellt, das eine unendlich dünne Protuberanz in einem tragenden Dipolfeld beschreibt. Sie haben das Stabilitätsverhalten ihres Modells gegen spezielle Verschiebungen untersucht. Das Gleichgewicht erwies sich als stabil gegenüber vertikalen Verschiebungen; ferner ergab sich als Stabilitätsbedingung gegenüber horizontalen Verschiebungen die Forderung, daß die Feldlinien an der Symmetrieebene ($y = 0$) nach oben konkav gekrümmt sein müssen. Wie wir oben schon erwähnt haben, ist die Anwendung dieser Klasse von Verschiebungen lediglich vollständig, wenn sie die Eigenfunktionen des assoziierten Eigenwertproblems sind, was offensichtlich hier nicht zutrifft. Anzer (1969) hat die Stabilitätseigenschaften dieser Familie unendlich dünner Protuberanzen bei Anwendung beliebiger Verschiebungen analysiert. Er benutzte eine modifizierte Version des Energieprinzips der MHD (Bernstein et al., 1958) und erhielt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Stabilität. Dieses Kriterium besteht aus zwei Bedingungen: a) $[B_z]dB_y(y=0)/dz \geq 0$, b) $B_y(y=0)d[B_z]/dz \leq 0$, wobei $[B_z]$ der Sprung der z-Komponente des Magnetfeldes über die Protuberanz ist. Anzer beweist, daß im Fall kleiner elektrischer Ströme

in der Protuberanz die Bedingung a) zu der von Kippenhahn und Schlüter bereits erhaltenen Bedingung für rein horizontale Verschiebungen führt. Nun zeigen die Beobachtungen (Rust, 1966), daß die Magnetfeldstärke bei den meisten ruhenden Protuberanzen mit der Höhe zunimmt; damit ist die Bedingung a) erfüllt. Die Bedingung b) ist äquivalent zu der Bedingung, daß die Stromdichte in der stabilen Protuberanz mit der Höhe nicht anwachsen darf. Direkte Beobachtungen zu dieser Bedingung sind bisher nicht vorhanden.

Kippenhahn und Schlüter (1957) haben später die Mikrostruktur der Protuberanz berücksichtigt, so daß die Protuberanz eine endliche Dichte aufwies. Wegen seiner einfachen Struktur wird dies Modell auch heute noch häufig herangezogen, obwohl es inzwischen realistischere Beschreibungen gibt.

Die Stabilitätsproblematik des Kippenhahn-Schlüter-Modells wurde erst vor kurzem durch Untersuchungen von Zweibel (1982) und Migliuolo (1982) erneut betrachtet. Zweibel (1982) hat das Energieprinzip der MHD (Bernstein et al., 1958) benutzt, um eine hinreichende Bedingung für Stabilität zweidimensionaler Gleichgewichte zu erhalten. Sie hat sich jedoch auf Verschiebungen beschränkt, die den gestörten Gesamtdruck (magnetischer Druck plus Plasmadruck) verschwinden lassen. Ferner wurde nur der Grenzfall betrachtet, bei dem der Verschiebungsvektor ξ eine unendlich große Wellenzahl (senkrecht zur Magnetfeldebene) hat. Bei der Anwendung auf das Kippenhahn und Schlüter-Modell hat es sich ergeben, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Das bedeutet jedoch, daß das Kippenhahn und Schlüter-Modell lediglich gegen die spezielle Klasse von Verschiebungen stabil ist, die durch die oben erwähnten Beschränkungen definiert ist. Eine globale Stabilitätsaussage ist unter diesen Umständen

nicht möglich, weil der Testfunktionenraum bei der Auswertung des Energiefunktionalis erheblich beschränkt wurde. Migliuolo (1982) hat das Stabilitätsverhalten des Kippenhahn und Schlüter-Modells gegenüber speziellen Verschiebungen untersucht. Er hat mit Hilfe der Normalmodenanalyse herausgefunden, daß dieses Gleichgewicht gegen Verschiebungen mit $\partial \xi / \partial z = 0$ stabil ist. Bei der Analyse wurde außerdem eine konstante Abwärtsgeschwindigkeit im Gleichgewicht zugelassen.

Wie aus diesen Untersuchungen hervorgeht, liegt bisher keine globale Stabilitätsaussage im Rahmen der idealen MHD für das Modell von Kippenhahn und Schlüter bezüglich allgemeiner Verschiebungen vor.

Sakai und Nishikawa (1983) haben die Stabilitätseigenschaften des Kippenhahn und Schlüter-Modells für resistive MHD-Verschiebungen analysiert. Sie nehmen das Plasma als inkompressibel an. Sie zeigen mit Hilfe der Normalmodenanalyse, daß diese Konfiguration gegen reconnection-Moden sehr schwach instabil ist. Die Anwachsrate der Instabilität liegt nahe bei der Diffusionszeit $\tau \approx 10^9$ s. Das bedeutet, daß die Protuberanz während ihrer Lebensdauer beinahe stabil ist. Sakai und Nishikawa haben danach die Fortpflanzung nicht linearer, schneller magnetoakustischer Wellen in der Protuberanz betrachtet. Diese Wellen können in den benachbarten aktiven Regionen ihren Ursprung haben. Die Wechselwirkung solcher Wellen mit den schwach instabilen reconnection-Moden bewirkt, daß die Protuberanz instabil wird mit einer Zeitskala $\tau \approx 10^2$ s. Diese Instabilität verursacht nach Ansicht der Autoren die disparition brusque der Protuberanz.

Andere Autoren haben das Stabilitätsproblem der Protuberanz als das Stabilitätsproblem der Übergangsfläche zwischen dem Protuberanzplasma und ihrer Umgebung formuliert; die Trennfläche stellt eine tangentielle Unstetigkeit dar, die durch einen Sprung in der Massendichte, Temperatur und der tangentialen Komponente des Magnetfeldes charakterisiert ist.

Nakagawa und Malville (1969) und Nakagawa (1970) haben die Übergangsfläche Protuberanz-Vakuum betrachtet. Andererseits haben Dolginov und Ostryakov (1980) den Fall Protuberanz-Korona untersucht. Nakagawa und Malville haben zahlreiche instabile Moden gefunden, z.B. mit Wellenlängen größer als die Skalenhöhe in der Protuberanz. Die entscheidende Ursache dieser Instabilitäten ist die Verscherung zwischen dem tragenden (Vakuum) und dem inneren (in x-Richtung angenommenen) Magnetfeld der Protuberanz. Die Autoren möchten diese Art von Instabilitäten mit den beobachteten bogenartigen periodischen Strukturen in ruhenden Protuberanzen identifizieren. Dolginov und Ostryakov haben ebenfalls Instabilität für Moden mit Wellenlängen größer als eine kritische Länge, die von den angenommenen Werten für Massendichte, Temperatur und Magnetfeld in der Korona und Protuberanz abhängt, herausgefunden. Sie interpretieren diese Instabilität als eine Rayleigh-Taylor-Instabilität, deren Anwachszeit zwischen $10^2 - 10^3$ s liegt (vergleichbar mit der Dauer der disparition brusque).

Auf der Suche nach einem lokalen Instabilitätskriterium für zweidimensionale isotherme Gleichgewichte hat Zweibel (1981) das Energieprinzip (Bernstein et al., 1958) unter zum Teil nicht ausreichend begründeten Annahmen untersucht. Sie hat bei der Umformung des Energiefunktionalen zwei stabilisierende Terme gegenüber den übr-

gen destabilisierenden Termen mit dem Argument der lokalen Betrachtung abgesondert, so daß sie drei hinreichende Bedingungen für Instabilität erhielt. Der Ausschuß der stabilisierenden Terme ist jedoch nicht immer gerechtfertigt (Galindo und Schindler, 1984), weil diese Terme die rücktreibende Kraft der magnetischen Spannung bei der Biegung der Feldlinien darstellen und im allgemeinen für die angesetzte Verschiebung nicht überall verschwinden. Zweibel hat als Beispiel ihr Instabilitätskriterium auf die Gleichgewichtsklasse von Zweibel und Hundhausen (1982) angewandt. Diese Klasse von isothermen magnetostatischen Gleichgewichten beschreibt ein in y periodische Konfiguration mit entweder bogenartigen, offenen oder konzentrischen geschlossenen Feldlinien in Abhängigkeit von einem Parameter α , der ein Maß für die Stromdichte ist. Zweibel hat herausgefunden, daß alle Mitglieder der Gleichgewichtsklasse (ausgenommen der Fall $\alpha = 0$) gegen horizontale Verschiebungen instabil sind, wobei sie die aufgetretenen Instabilitäten als Folge von Pinch-, Austausch- und Rayleigh-Taylor-Effekten erklärt.

Pustil'nik (1974) hat die Stabilität ruhender Protuberanzen gegen ballooning-Moden analysiert und dabei eine Bedingung für den Einsatz dieser Austauschinstabilität erhalten; demgemäß ist die Protuberanz instabil, wenn ihre Dicke größer als eine kritische Länge wird. Diese Länge hängt von der Elektronendichte und der Magnetfeldstärke ab. Setzt man die typischen Werte für Protuberanzen ein, bekommt man als kritische Dicke etwa $5 \cdot 10^8$ cm, was gerade in dem beobachteten Bereich liegt. Das zeigt offensichtlich, daß die Wirkung einer ballooning-Instabilität zu der eigenartigen Struktur ruhender Protuberanzen führen kann. Wenn die kritische Dichte überschritten

wird, wird sich das Zentralgebiet der Protuberanz in unteren chromosphärischen Schichten bewegen, derart, daß die Materie durch magnetische Feldröhren am Protuberanzfuß herunterfließt. Dieser Vorgang dauert an, bis sich ein x-Punkt in dem Magnetfeld bildet; ab dann beginnt die dynamische Dissipation des Feldes, d.h., ein Flare tritt in Erscheinung.

In den letzten Jahren haben sich die magnetohydrodynamischen Modelle ruhender Protuberanzen erheblich vermehrt. Sie haben inzwischen realistischere Eigenschaften im Vergleich zu den älteren Modellen erreicht. Jedoch bleibt das Stabilitätsproblem für beinahe alle Moden immer noch ungelöst. Solche Problematik wird besonders dadurch erschwert, wenn man z.B. dreidimensionale Gleichgewichte oder eine Wärmetransportgleichung berücksichtigt. Das äußerst komplizierte mathematische Problem, welches die linear gestörten MHD-Gleichungen schon für die einfachsten Modelle darstellt, wird aus technischen Gründen häufig durch ein Variationsproblem (Bernstein et al., 1958) ersetzt, das normalerweise leichter zu behandeln ist. Solange keine Wärmetransportgleichung im Modell betrachtet wird, ist das Problem selbstadjungiert, d.h. wir haben es mit konservativen Systemen zu tun. Die Wärmetransportgleichung führt zur Nichtselbstadjungiertheit der Differentialoperatoren im Problem.

Lerche und Low (1981) haben eine Variationsmethode für die Stabilitätsuntersuchung magnetohydrostatischer Gleichgewichte entwickelt und dabei die Wärmetransportgleichung berücksichtigt. Dieses Verfahren ist durch das Auftreten nichtselbstadjungierter Operatoren sehr kompliziert und wurde bisher noch auf kein Gleichgewicht angewandt.

3. Problemstellung

Wie wir bereits erläutert haben, ist das Stabilitätsproblem ruhender Protuberanzen im Rahmen der idealen MHD noch nicht ausreichend gelöst. Angesichts der zahlreich vorhandenen Protuberanzmodelle scheint es angebracht, dieses Problem innerhalb eines allgemeinen Formalismus zu betrachten.

In dieser Arbeit entwickeln wir einen solchen Formalismus zur Stabilitätsuntersuchung zweidimensionaler magnetohydrostatischer Gleichgewichte mit Hilfe des MHD-Energieprinzips (Bernstein et al., 1958) und analysieren die linearen Stabilitätseigenschaften von verschiedenen isothermen Protuberanzmodellen unter Berücksichtigung beliebiger Verschiebungen.

Obwohl die Isothermie in den von uns studierten Modellen (Menzel, 1951; Dungey, 1953; Kippenhahn und Schlüter, 1957; Lerche und Low, 1980) eine starke Voraussetzung für das Protuberanzplasma darstellt, beschreiben solche Modelle ziemlich gut viele der charakteristischen Merkmale der ruhenden Protuberanzen. Aus diesem Grund kann man die Betrachtung isothermer Modelle als einen notwendigen ersten Schritt verstehen.

Das in unserer Arbeit gewonnene Verfahren eignet sich ebenfalls für das Studium der Stabilitätseigenschaften anderer plasmaphysikalischer Konfigurationen, z.B. Alfvén-Wellen, neutrale Schichten usw., was wir beim Test des Verfahrens ausführlich zeigen werden (s. Anhang B).

Wir benutzen den für ruhende Protuberanzen relevanten Parameterbereich, und anhand der erzielten Ergebnisse bestimmen wir den Stabi-

litätsbereich der jeweiligen Modelle; dabei diskutieren wir die Konsequenzen unserer Untersuchung für die Theorie ruhender Protuberanzen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in folgender Weise: In Kapitel II führen wir die theoretischen Grundlagen unserer Untersuchungen aus, wobei wir die Grundgleichungen der MHD, die Theorie zweidimensionaler MHD-Gleichgewichte sowie die MHD-Stabilitätstheorie vorstellen. Wir beschreiben im Kapitel III ausführlich die von uns auf Stabilität untersuchten Modelle ruhender Protuberanzen. Die Anwendung des entwickelten Verfahrens auf zweidimensionale MHD-Gleichgewichte wird im Kapitel IV vorgestellt. Zunächst werden analytische Stabilitätsaussagen für verschiedene Protuberanzmodelle gewonnen. Danach wenden wir den von uns aufgestellten numerischen Code auf die vier oben erwähnten Protuberanzmodelle an. Wir diskutieren die Ergebnisse in Bezug auf die Mechanismen, die für das Stabilitätsverhalten verantwortlich sind und ziehen dazu auch einzelne Protuberanzbeobachtungen heran. Das Kapitel V enthält zunächst eine Zusammenfassung der gewonnenen Resultate mit einer vergleichenden Diskussion der Eigenschaften der verschiedenen Modelle. Als letzten Punkt diskutieren wir die Schlußfolgerungen aus unserer Untersuchung und ihre Bedeutung für die Theorie ruhender Protuberanzen. Wir beschreiben im Anhang A die Variationsmethode der finiten Elemente, die den Kernteil unseres numerischen Verfahrens bildet. Der Anhang B faßt die Tests zum numerischen Verfahren zusammen, dabei werden verschiedene Testkonfigurationen zusätzlich mit der Normalmodenanalyse untersucht. Im Anhang C wird die Abkopplung der Gleichungen im allgemeinen Eigenwertproblem bei verschiedenen Sonderfällen sowie die aufgetretene Entartung bei der allgemeinsten Verschlebung beschrieben.

II. Allgemeine theoretische Grundlagen

1. Grundgleichungen der MHD

Der physikalische Zustand in der Sonnenatmosphäre kann auf verschiedene Weisen beschrieben werden. Die dafür geeignetste mathematische Theorie hängt im wesentlichen von dem relativen Einfluß der unterschiedlichen physikalischen Effekte ab.

Die mittlere freie Weglänge in einer typischen ruhenden Protuberanz ($T = 7 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$, $n_e = 5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$) beträgt $\lambda_e = 17 \text{ cm}$, welche erheblich kleiner als die charakteristische Länge der Feinstrukturen in der Protuberanz ($L = 3 \cdot 10^7 \text{ cm}$) ist. Man kann daher die Protuberanz als ein makroskopisches kontinuierliches Medium betrachten. Die Teilchenstöße in dem Protuberanzplasma genügen der Bedingung $\tau_{ii} \ll \tau_o = L_o/v_A$. (Dabei ist L_o die Protuberanzdicke, v_A die typische Alfvéngeschwindigkeit und τ_{ii} die Ion-Ion Stoßzeit, wir erhalten $\tau_{ii} = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$, $\tau_o = 10^2 \text{ s}$.) Es folgt, daß der Druck in guter Näherung isotrop ist. Andererseits erreicht die Reynoldszahl $R = LV m_i v_{ii}/kT$ in der Protuberanz Werte von $R \sim 10^5$ (für $V = 10^5 \text{ cm s}^{-1}$ als typische Geschwindigkeit in den Feinstrukturen); damit sind die Viskositätseffekte im Medium zu vernachlässigen. Resistive Effekte in der Protuberanz spielen keine große Rolle, da die magnetische Reynoldszahl $R_m = \tau_{\text{Diff}}/\tau_o$ ebenfalls viel größer als 1 ist: Die Diffusionszeit $\tau_{\text{Diff}} = 4\pi\sigma L_o^2/c^2 = 1,3 \cdot 10^{10} \text{ s}$ (dabei ist $\sigma = n_e e^2/m_e v_{ei} = 4 \cdot 10^{12} \text{ s}^{-1}$ die elektrische Leitfähigkeit) ist beträchtlich größer als die Lebensdauer ruhender Protuberanzen ($\tau \sim 10^7 \text{ s}$). Bei der obigen Betrachtung der Dissipationsmechanismen aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Teilchen des Protuberanzplasmas wurden nur binäre Stoßprozesse

behandelt; turbulente Dissipationsprozesse bleiben deshalb unberücksichtigt.

Wenn wir uns lediglich für Bewegungen mit niedrigen Frequenzen interessieren oder wenn die typischen Geschwindigkeiten im Plasma viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, dann kann man den Verschiebungsstrom in der Protuberanz weitgehend vernachlässigen. Ferner können wir auch die auf die Raumladung wirkende elektrische Kraft vernachlässigen, da die Debye-Länge in typischen ruhenden Protuberanzen nur $\lambda_D = \sqrt{kT/4\pi e^2 n_e} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ beträgt. Eine Annahme, die die mathematische Behandlung unserer Theorie vereinfacht, ist die Vernachlässigung der Wärmeleitung in der Protuberanz.

Ein Medium, bei dem die oben erwähnten Verhältnisse herrschen, wird durch die ideale Magnetohydrodynamik beschrieben. Die MHD behandelt das Plasma als eine leitende Flüssigkeit und beschreibt die dynamische Wechselwirkung zwischen dieser Flüssigkeit und den elektromagnetischen Feldern.

Die Gleichungen der idealen MHD unter Berücksichtigung eines äußeren Gravitationsfeldes sind dann wie folgt (s. z.B. Krall und Trivelpiece, 1973):

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

Impulstransportgleichung:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \phi \quad (\text{II.2})$$

Ohm'sches Gesetz:

$$\underline{E} + \frac{1}{c} \underline{v} \times \underline{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

Induktionsgesetz:

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (\text{II.4})$$

Ampère'sches Gesetz:

$$\nabla \times \underline{B} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} \quad (\text{II.5})$$

Gleichung für adiabatische Zustandsänderungen:

$$\frac{d}{dt} (P \vartheta^{\gamma}) = 0 \quad (\text{II.6})$$

wobei ϱ Massendichte, P Druck, $\underline{v}$ Strömungsgeschwindigkeit, $\underline{E}$ elektrisches Feld, $\underline{B}$ Magnetfeld, $\underline{J}$ Stromdichte, ϕ Gravitationspotential und γ Adiabatenkoeffizient sind. Diese Gleichungen stellen ein in sich geschlossenes System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen dar.

Wir werden jetzt ein Koordinatensystem einführen, welches für alle Kapitel dieser Arbeit gelten soll: Die positive z-Achse zeigt in die entgegengesetzte Richtung der Gravitationsbeschleunigung

$\underline{g} = -\nabla\phi = -g\underline{e}_z$, d.h. sie entspricht der radialen Richtung aus dem Sonnenzentrum. Die beiden anderen Achsen liegen in der Sonnenoberfläche. Die x-Achse erstreckt sich längs der Protuberanzachse und die y-Achse steht senkrecht dazu (s. Abb. 1). Die Achsen bilden ein Rechtssystem.

2. Zweidimensionale MHD-Gleichgewichte

Wir betrachten Plasmakonfigurationen im Gleichgewicht, bei denen alle physikalischen Größen nur von y und z abhängen. Ferner nehmen wir an, daß das Gleichgewicht statisch ist. Diese Annahme ist im Fall ruhender Protuberanzen begründet, weil die beobachtete Strömungsgeschwindigkeit der Feinstrukturen ($v_F \sim 10^5 \text{ cm s}^{-1}$) gegenüber charakteristischen Geschwindigkeiten in der Protuberanz ($v_{\text{Schall}} = 9 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$, $v_A = 5 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$ für $B = 5\text{G}$) hinreichend klein ist, so daß v_F^2 gegenüber v_{Schall}^2 und v_A^2 vernachlässigt werden kann. Eine weitere Annahme besteht darin, die Gravitationsbeschleunigung g als konstant zu approximieren (über die Protuberanzhöhe ändert sich g um maximal 10 %).

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle für die Komponenten B_y und B_z ein Vektorpotential $\underline{A} = A(y,z)\underline{e}_x$ zu definieren, so daß das Magnetfeld $\underline{B}$ die folgende Form annimmt:

$$\underline{B} = \nabla A(y,z) \times \underline{e}_x + B_x(y,z) \underline{e}_x \quad (\text{II.7})$$

Der Ansatz (II.7) ist im Rahmen unserer zweidimensionalen Gleichgewichtstheorie allgemein und $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ ist identisch erfüllt.

Die Gleichgewichtsgleichung folgt aus (II.1) - (II.6), indem man $\partial/\partial t = 0$ und $\underline{v}_0 = 0$ einsetzt und die Stromdichte $\underline{j}$ mit (II.5) eliminiert:

$$-\nabla P_0 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}_0) \times \underline{B}_0 - \rho_0 \nabla \phi_0 = 0 \quad (\text{II.8})$$

wobei der Index 0 Gleichgewichtsgrößen bezeichnet. Falls ∇A_0 nicht überall parallel zu $\nabla \phi_0$ ist, kann man statt (y,z) die Koordinaten (A_0, ϕ_0) wählen (Low, 1975). Mit Hilfe von (II.7) erhält man (II.8)

in der folgenden Form:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial A_0} \left[P_0 + \frac{B_{x0}^2}{8\pi} \right] + \frac{1}{4\pi} \Delta A_0 \right\} \nabla A_0 + \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_0} \left[P_0 + \frac{B_{x0}^2}{8\pi} \right] + \rho_0 \right\} \nabla \phi_0 - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_{x0}}{\partial \phi_0} \nabla \phi_0 \times \nabla A_0 = 0 \quad (\text{II.9})$$

Daraus folgen sofort die Gleichgewichtsbedingungen für A_0 , B_{x0} , ρ_0 und P_0 , nämlich (vgl. Low, 1975; Schindler et al., 1983):

$$\Delta A_0 = -4\pi \frac{\partial \Pi(A_0, \phi_0)}{\partial A_0} \quad ; \quad \Pi(A_0, \phi_0) = P_0(A_0, \phi_0) + \frac{B_{x0}^2(A_0)}{8\pi} \quad (\text{II.10})$$

$$\rho_0 = - \frac{\partial P_0(A_0, \phi_0)}{\partial \phi_0} \quad (\text{II.11})$$

Wir haben offensichtlich ein Gleichgewichtsproblem für jede Wahl der Funktionen $P_0(A_0, \phi_0)$, $B_{x0}(A_0)$ und geeigneter Randbedingungen. Die einzigen Beschränkungen sind laut (II.10) und (II.11), daß P_0 und die Massendichte ρ_0 überall positiv sein müssen.

Wenn wir zusätzlich annehmen, daß das Plasma der Zustandsgleichung eines idealen Gases genügt:

$$P = \frac{\rho k T}{m} \quad (\text{II.12})$$

wobei T die Temperatur, k die Boltzmann-Konstante und m die mittlere Molekularmasse des Gases (im Fall des Protuberanzplasmas ist m weitgehend gleich der Ionenmasse m_i) sind, folgt aus (II.11) nach Integration:

$$P_0(A_0, \phi_0) = \tilde{P}_0(A_0) \exp \left[- \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi'}{\Theta(A_0, \phi')} \right] \quad (\text{II.13})$$

Dabei ist $\Theta = kT_0/m$, T_0 die Gleichgewichtstemperatur und $\tilde{P}_0(A_0)$ eine beliebige Funktion. Den Sonderfall eines isothermen Gleichgewichtes erhält man mit $T_0 = \text{konst}$, $\tilde{\phi}_0 = 0$ und $\phi_0 = gz$ in der Form:

$$P_0(A_0, z) = \tilde{P}_0(A_0) e^{\frac{gz}{h}} \quad (\text{II.14})$$

(II.14)

Hier ist $h = kT_0/mg$ die barometrische Skalenhöhe im isothermen Medium.

In dem eben dargestellten Gleichgewichtsformalismus ist die Temperatur-Funktion $\Theta(A_0, \phi_0)$ ebenfalls wie $\tilde{P}_0(A_0)$ und $B_{x0}(A_0)$ beliebig (In einer verbesserten Theorie müßte man $\Theta(A_0, \phi_0)$ als eine zusätzliche Unbekannte in einer Wärmetransportgleichung betrachten, die die Gleichung (II.6) ersetzen würde.).

Die Schwierigkeit des Problems der Lösung von (II.10) wird offensichtlich, wenn wir die Eindeutigkeit unter der Annahme von Dirichlet'sche Randbedingungen betrachten. Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen besagt (vgl. Courant und Hilbert, 1963), daß eine Lösung von (II.10) eindeutig ist, wenn:

$$\frac{\partial^2 \Pi(A., \phi.)}{\partial A.^2} \leq 0 \quad (II.15)$$

Diese Bedingung, die für alle Werte von A_0 und ϕ_0 in dem betreffenden Gebiet erfüllt sein muß, ist auf der Sonnenatmosphäre im allgemeinen nicht überall erfüllt. Low (1975) und Birn et al. (1978) haben aus dieser Mehrdeutigkeit der Lösung von (II.10) auf die Realisierungsmöglichkeit zweier denselben photosphärischen Randbedingungen genügenden Gleichgewichte geschlossen, zwischen denen ein Flare (bzw. eine disparition brusque) stattfinden kann.

Der in diesem Abschnitt gezeigte Gleichgewichtsformalismus erlaubt eine einheitliche Behandlung der Protuberanzgleichgewichte bei der Stabilitätsuntersuchung, die wir im Kapitel IV durchführen werden.

3. MHD-Stabilitätstheorie

Wir wollen in diesem Abschnitt die wesentliche Frage nach der Stabilität von MHD-Gleichgewichten behandeln. Ihre große Bedeutung liegt darin, daß nur stabile Gleichgewichte in der Natur vorkommen können. Aus diesem Grund stellt die Bedingung der Stabilität eine starke Forderung an Gleichgewichtsmodelle ruhender Protuberanzen dar.

Das Stabilitätsverhalten einer Gleichgewichtskonfiguration wird dadurch bestimmt, daß man eine kleine Störung an das System anbringt und die zeitliche Entwicklung dieser Störung verfolgt. In der magnetohydrodynamischen Näherung bedeutet eine solche Störung, daß die geladenen Teilchen innerhalb eines Volumenelements als Ganzes um die Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben werden. Wir bezeichnen ein System als stabil, wenn die im System wirkenden Kräfte die gestörte Konfiguration wieder in die Gleichgewichtskonfiguration zurückbringen. Andererseits, wenn das System als Folge der eingesetzten Störung bei wachsender Zeit mehr und mehr von der Gleichgewichtskonfiguration abweicht, nennen wir das betreffende Gleichgewicht instabil.

Die Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ aus der Gleichgewichtslage der einzelnen Flüssigkeitselemente ist offenbar mit einer Störung auch der anderen physikalischen Größen verbunden. Diese gestörten Größen lassen sich jedoch leicht als Funktion von $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ darstellen, so daß die zeitliche Entwicklung von $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ allein die Stabilitätseigenschaften des Systems bestimmt. Abweichungen von der Gleichgewichtskonfiguration infolge einer Instabilität geschehen so, daß die Amplitude der Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ und damit aller anderen physikalischen Größen mit der Zeit anwächst.

Die MHD (makroskopischen) Instabilitäten sind dadurch gekennzeichnet, daß sie im allgemeinen niedrigere Frequenzen und größere Wellenlängen als die kinetischen (mikroskopischen) Instabilitäten haben. Die mikroskopischen Instabilitäten hängen stark mit den Details der Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum zusammen, was die MHD von vornherein nicht berücksichtigt.

3.1 Die Normalmoden-Analyse

Das Stabilitätsproblem reduziert sich mathematisch gesehen auf die Untersuchung kleiner Störungen aus der Gleichgewichtslage. Daher benötigen wir die linearisierte Bewegungsgleichung für die kleine Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$, deren Lösung bei geeigneten Anfangs- und Randbedingungen die lineare zeitliche Entwicklung festsetzt. Die Lagrange'sche Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ lokalisiert die Ortskoordinaten einzelner Flüssigkeitselemente im mitbewegten System, so daß $\underline{\xi}(\underline{r}, t) = \underline{r}'(t) - \underline{r}$ gilt, wobei $\underline{r}'(t)$ die Lage des Flüssigkeitselementes zur Zeit t und $\underline{r}$ seine Anfangslage (Gleichgewichtslage) sind. $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$ bedeutet eben die Versetzung des Flüssigkeitselementes aus seiner Gleichgewichtslage infolge der Störung $\underline{\xi}(\underline{r}, t) := \int_0^t \underline{V}_1(\underline{r}, t') dt'$, wobei $\underline{V}_1$ die gestörte Geschwindigkeit ist. Die linearisierten MHD-Gleichungen führen daher nach leichter Umformung zu der in $\underline{\xi}$ linearen Bewegungsgleichung (s. z.B. Bernstein et al., 1958):

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \underline{F}(\underline{\xi}) \quad (\text{II.16})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \underline{F}(\underline{\xi}) = & \nabla \left[\rho \underline{P}_0 \cdot \nabla \cdot \underline{\xi} + (\underline{\xi} \cdot \nabla) \underline{P}_0 \right] + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}_0) \times \underline{Q} \\ & - \frac{1}{4\pi} \underline{B}_0 \times (\nabla \times \underline{Q}) + \nabla \cdot (\rho_0 \underline{\xi}) \nabla \phi \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

und $\underline{Q} = \nabla \times (\underline{E} \times \underline{B}_0)$. $\underline{F}$ ist ein reeller, zeitunabhängiger, linearer Differentialoperator zweiter Ordnung und stellt die linearisierte Kraftdichte des gestörten Systems dar. Es ist klar, daß die Bewegungsgleichung (II.16) ebenfalls für $\underline{V}(\underline{r}, t)$ gilt.

Wegen der Zeitunabhängigkeit der Koeffizienten in $\underline{F}(\underline{E})$ kann man (II.16) durch einen Produktansatz

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}(\underline{r}) \Theta(t) \quad (\text{II.18})$$

lösen. Es folgt daher, daß $\underline{E}(\underline{r})$ und $\Theta(t)$ Lösungen folgender Gleichungen sein müssen:

$$\ddot{\Theta}(t) = -\omega^2 \Theta(t) \quad (\text{II.19})$$

$$-\rho_0 \omega^2 \underline{E}(\underline{r}) = \underline{F}(\underline{E}(\underline{r})) \quad (\text{II.20})$$

dabei ist ω^2 die Separationskonstante. Die zeitliche Abhängigkeit der allgemeinen Lösung von (II.16) wird sofort aus (II.19) gewonnen. Ihre Ortsabhängigkeit $\underline{E}(\underline{r})$ ist durch die Lösung des Eigenwertproblems (II.20) mit Eigenwert ω^2 gegeben, so daß $\underline{E}(\underline{r}, t)$ die folgende allgemeine Form annimmt:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \sum_n a_n \underline{E}_n(\underline{r}) e^{i\omega_n t} \quad (\text{II.21})$$

wobei a_n konstante Koeffizienten sind. Für kontinuierliche Anteile des Spektrums ist die Summe (II.21) durch ein Integral zu ersetzen.

Abhängig vom Vorzeichen des Imaginärteils der Eigenfrequenz ω einer bestimmten Eigenmode kann die Mode oszillatorisch oder gedämpft sein oder mit der Zeit anwachsen. Das gilt für diskrete Spektren und sinngemäß ebenfalls für kontinuierliche Spektren (Laval et al., 1965).

Bei geeigneten Randbedingungen hat der Operator $\underline{F}(\underline{\xi})$ die wichtige Eigenschaft der Selbstadjungiertheit, d.h.

$$\int \eta^* \underline{F}(\underline{\xi}) dV = \int \underline{\xi} \cdot \underline{F}(\eta^*) dV \quad (\text{II.22})$$

für alle $\underline{\xi}$ und η^* , die den Randbedingungen genügen; der Stern bezeichnet konjugiert komplexe Größen.

Wir können die oben erwähnten Randbedingungen herausfinden, wenn wir die linke Seite von (II.22) mit Hilfe partieller Integrationen umschreiben:

$$\int \eta^* \underline{F}(\underline{\xi}) dV = \int \underline{\xi} \cdot \underline{F}(\eta^*) dV + \int \nabla \cdot \{ H(\underline{\xi}) \eta^* - H(\eta^*) \underline{\xi} + G(\underline{\xi}, \eta^*) \underline{B}_0 \} dV \quad (\text{II.23})$$

wobei gilt:

$$H(\underline{\xi}) = \gamma P_0 \nabla \cdot \underline{\xi} - \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \cdot \underline{B}_0 + \nabla P_0 \cdot \underline{\xi} \quad (\text{II.24})$$

$$G(\underline{\xi}, \eta^*) = \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \cdot \eta^* - \frac{1}{4\pi} [\nabla \times (\eta^* \times \underline{B}_0)] \cdot \underline{\xi} + \frac{1}{4\pi} \eta^* [\nabla \times \underline{B}_0] \times \underline{\xi} \quad (\text{II.25})$$

Daraus ergeben sich offensichtlich anhand des Gauß'schen Integralsatzes folgende mögliche Randbedingungen, damit $\underline{F}(\underline{\xi})$ selbstadjungiert ist:

$$\eta^* \underline{n} = \underline{\xi} \cdot \underline{n} = 0 \quad ; \quad \underline{B}_0 \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{auf dem Rand} \quad (\text{II.26})$$

Dabei ist $\underline{n}$ der Normalenvektor auf dem Rand des Gebietes, in dem das Plasma eingeschlossen ist. Das Plasma kann nur tangential ($\underline{v}_t \cdot \underline{n} = 0$) fließen.

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, können die für unsere Untersuchung interessanten Konfigurationen die Forderung $\underline{B}_0 \cdot \underline{n} = 0$ auf dem Rand nicht überall erfüllen. Eine Möglichkeit, diese

Schwierigkeit zu überwinden, ist eine andere Randbedingung für die Verschiebung, so daß (II.22) immer noch gültig bleibt. Diese alternative Randbedingung für die Verschiebung lautet:

$$\xi = 0 \quad \text{auf dem Rand} \quad (\text{II.27})$$

In diesem Fall verschwindet ebenso das elektrische Feld auf den Wänden, welche das Plasmagebiet begrenzen. Jedoch ist jetzt

$$\underline{B}_0 \cdot \underline{n} \neq 0 \text{ zugelassen.}$$

Die beschriebenen Randbedingungen sichern die Selbstadjungiertheit des Operators $\underline{F}(\xi)$. Sie erlauben jedoch nicht immer ein wohldefiniertes Problem für die Eigenwertgleichung (II.20). Je nach Gleichgewichtskonfiguration lassen sie sich häufig nur auf einzelne Ränder anwenden.

Wenn man die Stabilität zweidimensionaler Gleichgewichte untersucht, kann man immer periodische Randbedingungen für die Verschiebung in Richtung senkrecht zur Gleichgewichtsebene (x-Richtung) voraussetzen. Diese Art von Randbedingung ist offensichtlich verträglich mit den oben beschriebenen Randbedingungen, da dadurch ebenfalls der zu dieser Richtung gehörige Beitrag vom zweiten Integral in (II.23) verschwindet.

Die oben erwähnten Randbedingungen entsprechen dem Fall eines aus starren, ideal leitenden Wänden gebildeten Plasmarandes. Wände als Diskontinuitäten existieren selbstverständlich im Protuberanzgebiet nicht (abgesehen vielleicht vom unteren an die Photosphäre grenzenden Rand.) Formal suchen wir nach Lösungen von (II.20), die an bestimmten Flächen verschwinden, wo solche Wände gedacht werden könnten.

Man kann offensichtlich auch andere Arten von Randbedingungen betrachten, die zusätzlich z.B. ein trennendes Vakuummagnetfeld zwischen dem Plasma und den Wänden darstellen. Wir werden in dieser Arbeit jedoch keine solchen Konfigurationen behandeln, so daß die oben beschriebenen Randbedingungen für unsere Zwecke völlig ausreichen. Zu den Randbedingungen mit Vakuumfeldern, welche besonders für Fusionsplasmen wichtig sind, verweisen wir auf den Übersichtsartikel von Kadomtsev (1966).

Eine wichtige Konsequenz der Selbstadjungiertheit von $\underline{F}(\underline{\xi})$ ist, daß die Eigenwerte ω^2 der Gleichung (II.20) reell sind; folglich können exponentiell anwachsende Oszillationen (Überstabilität) nicht vorkommen. In der Praxis stellt die Lösung von Eigenwertproblemen, wie (II.20) einen erheblichen mathematischen Aufwand dar. Aus diesem Grund ist es wünschenswert, Stabilitätskriterien aufzustellen, ohne unbedingt in die mathematische Kompliziertheit eines solchen Eigenwertproblems einzutreten. Diese Möglichkeit bietet das Energieprinzip der idealen MHD, welches wir jetzt im einzelnen vorstellen wollen.

3.2 Das Energieprinzip der idealen MHD

Das Energieprinzip basiert auf der Untersuchung der potentiellen Energie des Systems infolge der Verschiebung $\underline{\xi}(\underline{r}, t)$:

$$\delta W(\underline{\xi}, \underline{\xi}^*) = -\frac{1}{2} \int \underline{\xi}^* \cdot \underline{F}(\underline{\xi}) dV \quad (\text{II.28})$$

Wenn man die Randbedingungen (II.26) bzw. (II.27) benutzt, erhält man nach einigen partiellen Integrationen δW in der folgenden Form (Bernstein et al., 1958):

$$\delta W(\underline{\xi}, \underline{\xi}^*) = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} |\underline{Q}|^2 - \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}_0) \cdot (\underline{Q} \times \underline{\xi}^*) + \rho P_0 |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 + (\underline{\xi} \cdot \nabla P_0) \nabla \cdot \underline{\xi}^* - (\underline{\xi}^* \cdot \nabla \phi) \nabla \cdot (\rho_0 \underline{\xi}) \right\} dV \quad (\text{II.29})$$

Die Selbstadjungiertheit des Operators $\underline{F}$ führt zu einem Energiesatz, nach dem die auf der Störung beruhende gesamte Energie $\delta W + \delta K$ zeitlich konstant ist. Dabei ist:

$$\delta K(\xi, \xi^*) = \frac{1}{2} \int \rho_s |\dot{\xi}|^2 dV \quad (\text{II.30})$$

die kinetische Energie des gestörten Systems. Aus diesem Energiesatz folgt offensichtlich, daß jede Verschiebung, die δW negativ macht, eine entsprechende Zunahme der kinetischen Energie verursacht. Andererseits, wenn δW für alle quadratintegrablen Verschiebungen, die die Randbedingungen erfüllen, positiv ist, dann haben wir ein stabiles System, weil die kinetische Energie zeitlich nicht anwachsen kann. Dies ist das Energieprinzip der idealen MHD, das von Bernstein et al. (1958) und Hain et al. (1957) hergeleitet wurde.

Dieses Energieprinzip stellt ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für Stabilität dar (Laval et al., 1965). Die hinreichende Bedingung für Stabilität folgt direkt aus dem Energiesatz. Die Notwendigkeit ist dagegen nicht so offensichtlich. Laval et al. (1965) haben darauf hingewiesen, daß die übliche Annahme der Vollständigkeit des Eigenfunktionssystems mit diskretem Spektrum für die MHD im allgemeinen nicht zutrifft. Sie zeigen ohne eine solche Annahme, daß, wenn eine Verschiebung $\underline{\eta}$ existiert, die δW negativ macht, man eine Verschiebung finden kann, die zeitlich wenigstens exponentiell anwächst; das System ist dann also instabil.

Das Stabilitätsproblem wird daher auf die Untersuchung des Vorzeichens des Minimums von δW zurückgeführt. Der große Vorteil des Energieprinzips liegt in der Möglichkeit, direkte Variationsmethoden

zur Stabilitätsuntersuchung anzuwenden. Es existiert ein Variationsprinzip, dessen Euler-Lagrange'sche Gleichung die Eigenwertgleichung (II.20) ist:

$$\delta \left[\delta W(\underline{\xi}, \underline{\xi}^*) + \lambda \delta K(\underline{\xi}, \underline{\xi}^*) \right] = 0 \quad (\text{II.31})$$

wobei λ der zu bestimmende Lagrange'sche Multiplikator ist. Nach der Durchführung der Variation in (II.31) folgt sofort: $\delta_0 \lambda \underline{\xi} = \underline{F}(\underline{\xi})$ mit $\lambda = -\omega^2$. Wenn wir eine Normierungsbedingung für $\underline{\xi}$ einführen (um triviale $\underline{\xi}$ auszuschließen), können wir (II.31) als die Minimierung von δW mit der Nebenbedingung $1/2 \int_0 \delta_0 |\underline{\xi}|^2 dV = 1$ interpretieren. Der tiefste Eigenwert ω_1^2 ist daher gleich dem Minimum von $\delta W : \omega_1^2 = \text{Min} \delta W(\underline{\xi}, \underline{\xi}^*)$.

Die Vorzeichenuntersuchung von δW im Energieprinzip wird auf die Lösung der oben beschriebenen Variationsaufgabe zurückgeführt. Demgemäß muß δW bei stabilen Systemen durch ein positives Minimum charakterisiert werden. Bei der Variation kann man die Eigenmode $\underline{\xi}$ in geeigneter Weise durch sogenannte Testfunktionen approximieren, welche von einer festgelegten Zahl freier Parameter abhängen; diese Parameter werden dann durch die Variation bestimmt. Die Testfunktionen müssen quadratintegrabel sein und die Randbedingungen erfüllen.

Ein weiterer Vorteil des Energieprinzips liegt darin, daß Instabilität manchmal relativ leicht bewiesen werden kann. Dafür reicht es, wenn man aus physikalischen Überlegungen eine spezielle Verschiebung finden kann, die zu einem negativen δW führt.

Das Energieprinzip gestattet daher mit wachsender Genauigkeit die Bestimmung des gesamten Frequenzspektrums sowie der zugehörigen

Moden. Wir werden im Kapitel IV die hier dargestellte Variationsmethode benutzen.

3.3 Spezialisierung des MHD-Energieprinzips für zweidimensionale Gleichgewichte

Aufgrund der späteren Anwendung des Energieprinzips auf zweidimensionale Protuberanzgleichgewichte ist es angebracht, den Operator δW (II.29) entsprechend zu spezialisieren. Wir nehmen an, daß die Gleichgewichtsgrößen nicht von der x-Koordinate (entlang der Protuberanzachse) abhängen. Ferner lassen wir komplexe dreidimensionale Verschiebungen zu, deren Ortsabhängigkeit folgendermaßen aussieht:

$$\xi(x, y, z) = [\hat{\xi}_x(y, z) \underline{e}_x + \hat{\xi}_1(y, z)] e^{ikx} = [\hat{\xi}_x(y, z) \underline{e}_x + \hat{\xi}_y(y, z) \underline{e}_y + \hat{\xi}_z(y, z) \underline{e}_z] e^{ikx} \quad (\text{II.32})$$

d.h. wir nehmen periodische Randbedingungen in x-Richtung an, was offensichtlich wegen des x-unabhängigen Gleichgewichtes erlaubt ist. In der (y, z)-Ebene fordern wir weiterhin, daß ξ auf dem Rand verschwindet. Wir setzen zunächst die Verschiebungen (II.32) in (II.29) ein und berücksichtigen dazu die Gleichgewichtsgleichung (II.8) in der folgenden Form:

$$\nabla_{\perp} P + \frac{1}{4\pi} \Delta A \nabla_{\perp} A + \frac{1}{4\pi} B_x \nabla_{\perp} B_x + \int \nabla_{\perp} \phi = 0 \quad (\text{II.33})$$

(wir werden ab jetzt aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Index 0 bei den Gleichgewichtsgrößen verzichten). Dabei ist

$\nabla_{\perp} = \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$. Nach einigen partiellen Integrationen und elementaren Umformungen erhalten wir für δW den Ausdruck (vgl. Birn und Schindler, 1981; Schindler et al., 1983):

$$\begin{aligned} \delta W(\xi, \xi^*) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[|\nabla_1 a|^2 - 4\pi \frac{\partial^2 \Pi}{\partial A^2} |a|^2 \right] + k^2 \left[\frac{1}{4\pi} |B_x \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_x B_1|^2 + \mathcal{P} |\hat{\xi}_x|^2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} |B_1 \nabla_1 \hat{\xi}_x - B_x \nabla_x \hat{\xi}_1|^2 + \mathcal{P} |\nabla_1 \hat{\xi}_1|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[\mathcal{S} (\nabla_1 \hat{\xi}_1) \hat{\xi}_1^* \nabla_1 \phi \right] - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} |\hat{\xi}_1 \cdot \nabla_1 \phi|^2 \\ & + 2k \operatorname{Im} \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla_1 a \times e_x) \cdot (B_x \hat{\xi}_1^* - \hat{\xi}_x^* B_1) - \frac{1}{4\pi} \Delta A \hat{\xi}_x a^* - \mathcal{P} \hat{\xi}_x (\nabla_1 \hat{\xi}_1^*) \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{S} \hat{\xi}_x (\hat{\xi}_1^* \cdot \nabla_1 \phi) - \frac{1}{8\pi} B_x \Delta A (\hat{\xi}_1 \times \hat{\xi}_1^*) \cdot e_x \right] \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Hier bedeuten: $a = -\hat{\xi}_1 \cdot \nabla_1 A$, $B_1 = \nabla_1 A \times e_x$, $\Pi = P + B_x^2/8\pi$, $\phi = gz$.

Die x-Integration ist über eine Periode auszuführen. Man kann gleichfalls durch eine weitere Umformung einzelner Terme in (II.34) eine alternative Form für δW bekommen (Birn und Schindler, 1981; Schindler et al., 1983):

$$\begin{aligned} \delta W(\xi, \xi^*) = & \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[|\nabla_1 a|^2 - 4\pi \frac{\partial^2 \Pi}{\partial A^2} |a|^2 \right] + \frac{1}{4\pi} |B_1 \cdot \nabla_1 \hat{\xi}_x - B_x \nabla_x \hat{\xi}_1|^2 + \frac{1}{4\pi} k^2 |B_x \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_x B_1|^2 \right. \\ & + \mathcal{P} \left[1 + \frac{\mathcal{S}^2}{\mathcal{P} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}} \right] |\nabla_1 \hat{\xi}_1|^2 - \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi} \left| \hat{\xi}_1 \cdot \nabla_1 \phi + \frac{\mathcal{S}}{\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \phi}} \nabla_1 \hat{\xi}_1 \right|^2 + 2k \operatorname{Im} \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla_1 a \times e_x) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (B_x \hat{\xi}_1^* - \hat{\xi}_x^* B_1) - \frac{1}{4\pi} \Delta A \hat{\xi}_x a^* - \frac{1}{8\pi} B_x \Delta A (\hat{\xi}_1 \times \hat{\xi}_1^*) \cdot e_x \right] \left. \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Wenn man sich für Verschiebungen interessiert, die wie das Gleichgewicht x-unabhängig sind, kann man sofort aus (II.34) bzw. (II.35) durch $k = 0$ den in diesem Fall geltenden Ausdruck für δW gewinnen. Ergänzend erwähnen wir an dieser Stelle, daß Variationsprinzipien für x-unabhängige Verschiebungen auch im Rahmen anderer Plasmatheorien, wie resistive MHD und Vlasov-Theorie, bereits existieren (Tasso, 1975; Goldstein, 1981; Schindler et al., 1973; Schindler et al., 1983).

Wir werden bei der Stabilitätsuntersuchung ruhender Protuberanzen die Ausdrücke (II.34) und (II.35) benutzen. Dafür benötigen wir noch die modellabhängigen Funktionen für P und B_x sowie die aus diesen Größen bestimmte Gleichgewichtslösung A . Nachdem diese Gleichgewichtsgrößen festgelegt sind, brauchen wir lediglich den Minimierungsprozeß für δW durchzuführen, um zu den gesuchten Stabilitätsaussagen zu gelangen.

Bevor wir zur Anwendung des Operators δW auf Protuberanzgleichgewichte kommen, werden wir im nächsten Kapitel die verschiedenen Protuberanzmodelle ausführlich vorstellen und ihre Eigenschaften diskutieren.

III. Gleichgewichtsmodelle ruhender Protuberanzen

Wir stellen in diesem Kapitel die MHD-Protuberanzmodelle vor, die wir in der vorliegenden Arbeit auf Stabilität untersuchen werden. Ferner diskutieren wir ausführlich ihre Eigenschaften sowie ihre Anwendbarkeitsgrenzen.

1. Modell von Menzel

Menzel hat zum ersten Mal gezeigt, daß ein Magnetfeld die ruhende Protuberanz gegen ihr Gewicht und die Druckkräfte im Gleichgewicht halten kann. Das Menzel'sche Modell nimmt ein isothermes Protuberanzplasma an. Diese Annahme bedeutet in erster Linie für die Protuberanz thermische Isolierung von der heißen, koronalen Umgebung, so daß das Problem des Wärmetransports an der Korona-Protuberanz-Übergangszone außer Betracht bleibt.

Wie wir bereits im vorigen Kapitel gezeigt haben, wird jedes zweidimensionale Gleichgewichtsproblem (II.10) durch zwei festgelegte Funktionen $P(A, \phi)$, $B_x(A)$ charakterisiert. Dem Menzel'schen Modell entspricht die Auswahl:

$$B_x(A) = 0 ; \quad P(A, \phi) = r A^{-2q} e^{-2(q+1)\phi} \quad (\text{III.1})$$

Dabei sind r und q Konstanten, die später erläutert werden. Wir benutzen schon eine geeignete (s. unten) Normierung derart, daß hier alle Größen dimensionslos sind. Die Gleichgewichtsgleichung (II.10) lautet jetzt:

$$\Delta A = r q A^{-2q-1} e^{-2(q+1)\phi} \quad (\text{III.2})$$

Menzel hat bemerkt, daß (III.2) durch einen Produktansatz lösbar wird:

$$A(y,z) = f(y) e^{-z} \quad (\text{III.3})$$

Daraus folgt sofort aus (III.2), daß f der folgenden Differentialgleichung genügen muß:

$$f'' + f - q r f^{-2q-1} = 0 \quad (\text{III.4})$$

Als Anfangsbedingungen hat Menzel gefordert: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

Aus (III.1) erhält man für $\mathcal{G}$ (II.11):

$$\mathcal{G}(A, \phi) = 2r(q+1) A^{-2q} e^{-2(q+1)\phi} \quad (\text{III.5})$$

Die von uns eingeführten normierten Größen sind folgendermaßen festgelegt:

$$y = \frac{\tilde{y}}{2h} ; z = \frac{\tilde{z}}{2h} ; f = \frac{\tilde{f}}{f_0} ; A = \frac{\tilde{A}}{f_0} ; P = \frac{4h^2 8\pi \tilde{P}}{f_0^2} ; \phi = \frac{\tilde{\phi}}{2hg} = z ;$$

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi \cdot 4h^2 \cdot 2qh}{f_0^2} ; \underline{J} = \frac{4\pi \cdot 4h^2 \underline{\tilde{J}}}{c f_0} \quad (\text{III.6})$$

Dabei ist h die barometrische Skalenhöhe beim Vorhandensein eines Magnetfeldes und f_0 eine charakteristische Amplitude des Vektorpotentials. Die Größen mit Schlange bezeichnen dimensionsbehaftete Variablen. Wenn wir die barometrische Skalenhöhe bei Abwesenheit eines Magnetfeldes mit $h_0 = kT_0/mg$ (m ist die mittlere Ionenmasse, T_0 die konstante Temperatur) benennen, ist $q = (h/h_0) - 1$. Nach (III.3) können wir schreiben:

$$P(y,z) = r f(y) e^{-2z} \quad (\text{III.7})$$

$$\underline{B}(y,z) = 8\pi (1+r-r f(y)) e^{-2z} \quad (\text{III.8})$$

Daraus folgt, daß r gleich dem Verhältnis Gasdruck zu magnetischem Druck bei $y = 0$ ist, also $r = 8\pi P/B^2|_{y=0}$. Die Massendichte $\mathcal{G}$ kann analog umgeschrieben werden:

$$\mathfrak{f}(y,z) = 2r(q+1) f(y) e^{-2z} \quad (\text{III.9})$$

Für den Fall $q = 1$ hat Menzel die folgende Lösung von (III.4) angegeben:

$$f(y) = \left[1 \sin^2 y + \cos^2 y \right]^{1/2} \quad (\text{III.10})$$

Für andere Werte von q muß man die Integration von (III.4) numerisch ausführen. Bei der Annahme $q > 0$ (s. unten) zeigt Menzel, daß die Lösung für $q \neq 1$ ähnliche Eigenschaften wie die des Falles $q = 1$ besitzt: i) für $qr \neq 1$ ist f eine periodische Funktion von y ; ii) $f = 1$ ist eine Lösung für $qr = 1$; iii) im Fall $qr > 1$ besitzt f ein Minimum bei $y = 0$ und iv) im Fall $qr > 1$ besitzt f ein Maximum bei $y = 0$.

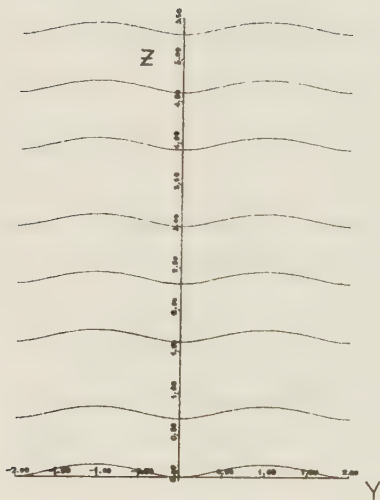
Aus (II.7) folgt sofort, daß die Projektion der Feldlinien auf der (y,z) -Ebene durch $A(y,z) = \text{Konstante}$ gegeben ist. Beim Menzel'schen Modell ($B_x = 0$) bekommt man für die Feldlinien den Ausdruck:

$$z = \ln \left(\frac{f(y)}{K} \right) \quad (\text{III.11})$$

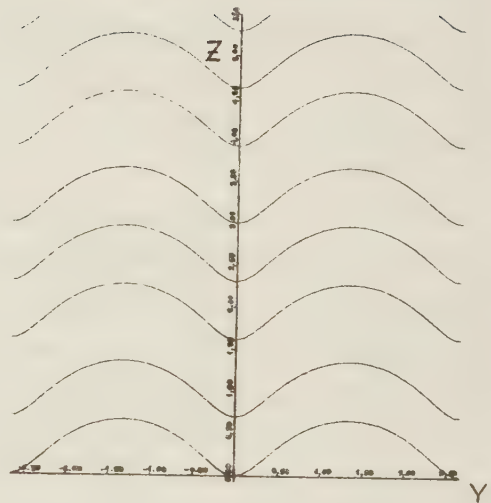
für beliebige positive Konstanten K . Die Abb. 2 zeigt exemplarisch die Feldlinien für zwei Wertepaare r, q ; je größer das Produkt qr ist, desto steiler ist der Verlauf der Feldlinien.

Aus (III.7) und (III.9) erkennt man, daß $\mathfrak{f}$ und P bei festem z ebenfalls periodisch in y sind. Ferner erreichen $\mathfrak{f}$ und P ein Maximum, wo die Feldlinien ein Minimum besitzen und umgekehrt.

Die Lösung $f = 1$ zeigt die interessante Eigenschaft, daß ihre Isobaren, wie im Fall $\underline{B} = 0$, horizontale Linien sind, aber mit einer Skalenhöhe h statt h_0 . Da in diesem Fall die Gravitationskraft durch



2a: $r = 0,5$; $q = 4$.



2b: $r = 3$; $q = 2$.

Abb. 2: Menzel-Modell: Feldlinien

den Gradienten des gesamten Druckes $P + \underline{B}^2/8\pi$ ausgeglichen wird, muß die Skalenhöhe h größer als h_0 sein, d.h. es muß $q = (h/h_0) - 1 > 0$ gelten.

Für spätere Anwendungen können wir noch das Magnetfeld $\underline{B}$ sowie die Stromdichte $\underline{J}$ explizit schreiben:

$$\underline{B} = B_z = -f(y) e^{-z} \underline{e}_y - f'(y) e^{-z} \underline{e}_z \quad (\text{III.12})$$

$$\underline{J} = J_x \underline{e}_x = -\Delta A \underline{e}_x = r q f(y) e^{-z} \underline{e}_x \quad (\text{III.13})$$

Für denselben Zweck kann man die Differentialgleichung für $f(y)$ (III.4) nach einer Integration folgendermaßen schreiben:

$$(f')^2 = 1 + r - f^2 - r f^{-2q} \quad (\text{III.14})$$

Das Menzel'sche Gleichgewichtsmodell lieferte eine gute Beschreibung der globalen Struktur der ruhenden Protuberanzen, jedoch weist es einige schwache Punkte in Bezug auf die Beschreibung detaillierter Protuberanzmerkmale auf. Die Periodizität der Funktion $f(y)$ bedeutet eine alternierende Reihe von Maxima und Minima der Massendichte, d.h. unendlich viele Protuberanzen. Deshalb ist man gezwungen, auf irgendeine Weise (z.B. periodenweise) das Gleichgewicht in y -Richtung abzuschneiden. Andererseits bietet dies den Vorteil, nicht nur eine einzelne, sondern sogar mehrere Protuberanzen berücksichtigen zu können. Dagegen bietet das ebenfalls periodische Magnetfeld keine Möglichkeit für den Anschluß an das dipolartige auf der Sonnenatmosphäre fest verankerte Magnetfeld der Protuberanzumgebung. Die Protuberanzdicke, die durch den Abstand zwischen zwei Massendichteminima gegeben ist, ist z -unabhängig; sie nimmt bei festem r mit wachsendem q ab und bei festem $q > 1$ mit wachsendem r zu. Das Festlegen der freien Parameter r, q bestimmt eindeutig die Protuberanzdicke.

2. Modell von Dungey

Dungey (1953) betrachtet eine isotherme Protuberanz. Ferner verschwindet die Magnetfeldkomponente längs der Protuberanzachse. Dungey hat sich für Magnetfelder interessiert, die außerhalb jedes durch eine Feldlinie begrenzten Gebiets verschwinden. In diesem Fall ist die Wahl der freien Funktionen $B_x(A), P(A, \phi)$ in dem Gleichgewichtsformalismus wie folgt:

$$B_x(A) = 0 ; P(A, \phi) = 8(C-A)e^{-2\phi} \quad (\text{III.15})$$

dabei ist C eine freie Konstante, die groß genug sein muß, damit der Gasdruck überall positiv bleibt. Wir haben wieder bereits eine Normierung für alle Größen eingeführt (s. unten). Für die Gleichgewichtsgleichung (II.10) erhalten wir:

$$\Delta A = 4 e^{-2\phi} \quad (\text{III.16})$$

Bei den Randbedingungen ist eine freie Oberfläche zu berücksichtigen. Wir benutzen die folgende Normierung nach geeigneten typischen Werten der entsprechenden Größen:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\tilde{Y}}{2h_0} ; Z = \frac{\tilde{Z}}{2h_0} ; A = \frac{\tilde{A}}{A_0} ; P = \frac{8\pi 4h_0^2 \tilde{P}}{A_0^2} ; \phi = \frac{\tilde{\phi}}{2h_0 g} = Z ; \\ \rho &= \frac{8\pi 4h_0^2 2h_0 g \tilde{\rho}}{A_0^2} ; J = \frac{4\pi 4h_0^2 \tilde{J}}{c A_0} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Die Größen mit Schlange sind dimensionsbehaftete Größen; h_0 ist die barometrische Skalenhöhe und A_0 die charakteristische Amplitude des Vektorpotentials. Als Lösung des Randwertproblems (III.16) gibt Dungey folgendes Vektorpotential an:

$$A(Y, Z) = 1 - 2 \cos y e^{-Z} + e^{-2Z} \quad (\text{III.18})$$

Hier handelt es sich ebenfalls, wie beim Menzel'schen Modell, um eine in y periodische Konfiguration. Die Magnetfeldlinien $A(y, z) = (1 - \cos y e^{-z})^2 + \sin^2 y e^{-2z} = K \geq 0$ sind für $K < 1$ geschlossene, konzentrische Linien, dagegen für $K > 1$ offene, wellenartige Linien (s. Abb. 3). Das Magnetfeld zeigt einen Neutralpunkt bei $(2\pi n, 0)$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Wir können die Stelle dieses Neutralpunktes in Richtung z beliebig um einen Abstand z_0 verschieben, ohne das Gleichgewicht zu stören; wir bekommen einen für unsere Zwecke günstigeren Ausdruck für das Vektorpotential:

$$A(Y, Z) = 1 - 2 \cos y e^{-(Z-Z_0)} + e^{-2(Z-Z_0)} \quad (\text{III.19})$$

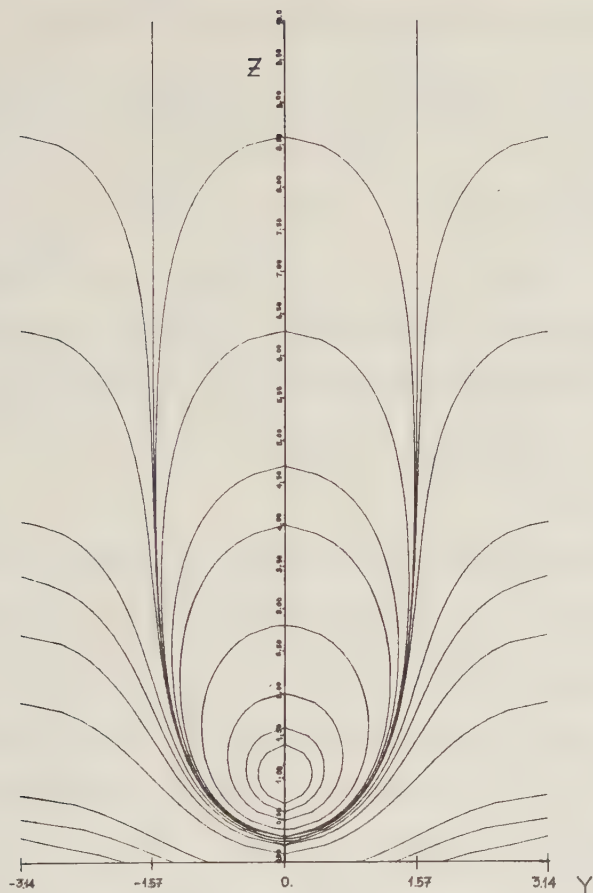


Abb. 3: Dungey-Modell: Feldlinien, $z_0 = 1$.

Die Abb. 3 zeigt die Feldlinien für einen Fall, bei dem z_0 verschieden von Null ist. Wir können ergänzend die Massendichte nach (II.11) schreiben:

$$\rho(A, \phi) = 16(C - A) e^{-2\phi} \quad (\text{III.20})$$

Wir bekommen die folgenden Ausdrücke für die Gleichgewichtsgrößen:

$$P = \varrho/2 = 8 \left[C - 1 + 2 \cos y \, e^{-(z-z_0)} - e^{-2(z-z_0)} \right] e^{-2(z-z_0)} \quad (\text{III.21})$$

$$\underline{B} = \underline{B}_1 = \left[2 \cos y \, e^{-(z-z_0)} - 2 e^{-2(z-z_0)} \right] \underline{e}_y - 2 \sin y \, e^{-(z-z_0)} \underline{e}_z \quad (\text{III.22})$$

$$\underline{J} = J_x \underline{e}_x = -4 e^{-2(z-z_0)} \underline{e}_x \quad (\text{III.23})$$

Aus (III.21) und (III.22) erkennt man sofort, daß die Massendichte ϱ (bzw. P) bei festem z ein Maximum in y erreicht, wo B_y gleichfalls ein Maximum und B_z ein Minimum erreichen. Das hat zur Folge, daß innerhalb einer Periode von 2π eine passende Beschreibung für eine Protuberanz im Gleichgewicht vorliegt.

In der von Dungey betrachteten Lösung ist das Magnetfeld auf das Gebiet beschränkt, welches zwischen zwei unendlich langen, horizontalen Zylindern liegt; solche Zylinder werden durch die Projektion zweier geschlossener Feldlinien in x -Richtung definiert. Wie man sofort mit Hilfe von $\underline{B}^2 = |\nabla A|^2 = 4Ae^{-2(z-z_0)}$ und (III.21) verifizieren kann, gilt der von Dungey erhaltene Ausdruck:

$$\frac{d}{dA} \left\{ (P + \underline{B}^2) e^{2(z-z_0)} \right\} = -\frac{\underline{B}^2}{A} e^{2(z-z_0)} \quad (\text{III.24})$$

Die rechte Seite (III.24) ist immer negativ, so daß der gesamte Druck bei einer festen Höhe mit abnehmendem A zunimmt. Demgemäß ist der gesamte Druck größer für die inneren Zylinder. Wenn man sich längs einer horizontalen Linie bewegt, findet man eine durch das Magnetfeld reduzierte Massendichte auf der inneren Seite des äußeren Zylinders, aber eine erhöhte Massendichte in dem inneren Zylinder. Folglich kann der Gasdruck innerhalb des inneren Zylinders wesentlich größer sein als derjenige, welcher ohne Magnetfeld für dieselbe Höhe herrschen würde. Dungey identifiziert die Protuberanz als die verdichtete Materie des inneren Zylinders. Cowling

(1953) hat darauf hingewiesen, daß man für die Realisierung dieser Konfiguration entgegengesetzte, elektrische Ströme an den Zylindermantelflächen in x-Richtung benötigt. Diese Situation kommt in der Sonnenatmosphäre wahrscheinlich nicht vor. Die Dungey-Magnetfeldkonfiguration entspricht besonders im unteren Gebiet einer z-Pinchkonfiguration.

Aus dieser Argumentation scheint es uns angebracht, in unserer Stabilitätsuntersuchung eher die vollständige Gleichgewichtskonfiguration zu betrachten, bei der der Strom nach (III.23) lediglich in einer Richtung fließt. Wenn wir als Protuberanzdicke Y den Abstand zwischen zwei Massendichteminima definieren, kann die Dicke nur den festen Wert $Y = 4\pi h_0$ annehmen; für eine typische Temperatur in der Protuberanz von 7000°K erhalten wir $h_0 = 211\text{ km}$ und somit $Y = 2650\text{ km}$. Obwohl dieser Wert von Y etwas niedriger als die beobachtete mittlere Dicke (5000 km) ist, zeigt Y die richtige Größenordnung. Die Periodizität des Gleichgewichts erlaubt die Betrachtung einer Anordnung nebeneinanderliegender Protuberanzen. Wir werden bei der Anwendung unseres Verfahrens, außer einer einzelnen Protuberanz, den Fall einer Doppelprotuberanz behandeln.

Ähnlich wie beim Menzel'schen Modell fehlt auch diesmal eine Beschreibung des dipolartigen Anschlußfeldes, welches das Magnetfeld der Protuberanz mit den photosphärischen Schichten verbinden soll. Trotzdem stellt das Dungey-Modell im großen eine plausible Beschreibung der im Gleichgewicht befindlichen Protuberanzen dar.

3. Modell von Kippenhahn und Schlüter

Kippenhahn und Schlüter (1957) betrachten eine Gleichgewichtssituation, bei der neben der Isothermie die Eindimensionalität aller Protuberanzgrößen vorausgesetzt wird. Wie bei den vorigen Modellen wird hier erneut die Magnetfeldkomponente längs der Protuberanzachse zu Null angenommen; B_y ist ebenfalls konstant und man erhält einschichtartige Konfiguration. Die diesem Fall entsprechenden Funktionen $P(A, \phi)$, $B_x(A)$ im Gleichgewichtsformalismus lauten folgendermaßen:

$$B_x(A) = 0 ; \quad P(A, \phi) = e^{2A - \frac{2}{r}\phi} \quad (\text{III.25})$$

Dabei ist r eine unten erläuterte Konstante. Wir haben hier bereits eine geeignete Normierung eingeführt (s. unten). Für die Gleichgewichtsgleichung (II.10) bekommen wir:

$$\Delta A = - e^{2A - \frac{2}{r}\phi} \quad (\text{III.26})$$

Wenn man den Ansatz $A(y, z) = G(z) - F(y)$ benutzt, erhält man aus (III.26):

$$G(z) = \frac{1}{r} z \quad (\text{III.27})$$

$$F''(y) = e^{-2F(y)} \quad (\text{III.28})$$

Für (III.29) haben Kippenhahn und Schlüter die Randbedingungen $F'(0) = 0$, $F'(\infty) = 1$ gefordert. Mit der Annahme, daß der Druck im Unendlichen verschwindet, findet man die Lösung:

$$F(y) = \ln \cosh y \quad (\text{III.29})$$

und damit

$$A(y, z) = \frac{1}{r} z - \ln \cosh y \quad (\text{III.30})$$

Die für dieses Modell benutzte Normierung ist die folgende:

$$y = \frac{\tilde{y}}{L} ; z = \frac{\tilde{z}}{L} ; B = \frac{\tilde{B}}{B_{\infty}} ; A = \frac{\tilde{A}}{L B_{\infty}} ; P = \frac{8\pi\tilde{P}}{B_{\infty}^2} ; \phi = \frac{\tilde{\phi}}{L g} = Z ;$$

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi L g \tilde{\mathcal{G}}}{B_{\infty}^2} ; \mathcal{J} = \frac{4\pi L \tilde{\mathcal{J}}}{c B_{\infty}} \quad (\text{III.31})$$

Wobei $L = 2h_0/r$ mit $r = B_{\infty}/B_y$. B_y ist der konstante Wert für die y-Komponente des Protuberanzfeldes, B_{∞} der asymptotische, konstante Wert der z-Komponente im Unendlichen; h_0 ist die barometrische Skalenhöhe. Wieder sind die Größen mit Schlange dimensionsbehaftete Variablen. Mit Hilfe von (III.30) erhalten wir die folgenden Ausdrücke für die Gleichgewichtsgrößen:

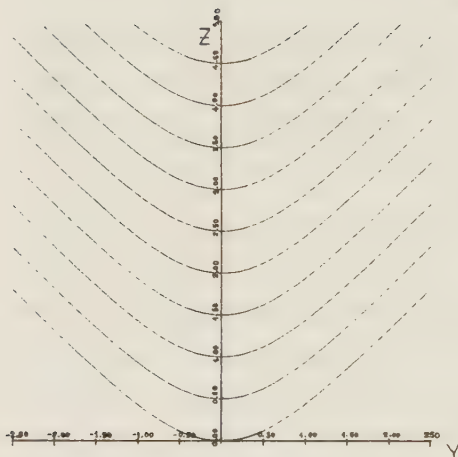
$$P = \frac{1}{\cosh^2 y} \quad (\text{III.32})$$

$$\mathcal{G} = \frac{2}{r \cosh^2 y} \quad (\text{III.33})$$

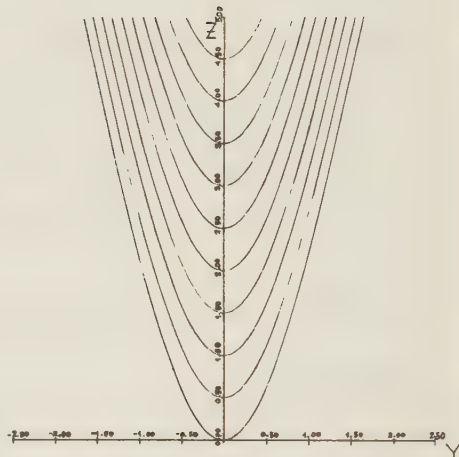
$$\underline{B} = \frac{1}{r} e_y + \tanh y e_z \quad (\text{III.34})$$

$$\underline{\mathcal{J}} = \frac{1}{\cosh^2 y} e_x \quad (\text{III.35})$$

Die Feldlinien $A(y,z) = \text{Konst.}$ für zwei r-Werte werden in der Abb. 4 dargestellt. Der Feldlinienverlauf sowie der Massendichteverlauf hängen explizit vom Verhältniswert r ab, so daß r die Neigung der Feldlinien für große y-Werte angibt. Aus (III.25) und (II.11) erkennt man, daß entlang der Feldlinien eine barometrische Massendichte- und Druckverteilung vorliegt. Diese Konfiguration zeigt ebenfalls das erwartete Durchhängen der Feldlinien infolge des Protuberanzsgewichts. Ferner nehmen Druck, Massen- und Stromdichte nach ihrem Maximum bei $y = 0$ mit wachsendem y so schnell ab, daß man eine einzelne ruhende Protuberanz gut beschreiben kann. Wir können daher die Protuberanzdicke als einen freien Parameter in unserer Stabilitätsuntersuchung dieses Modells betrachten.



4a: $r = 1$



4b: $r = 5$

Abb. 4: Kippenhahn-Schlüter-Modell: Feldlinien

Wie man direkt aus (III.30) entnehmen kann, entspricht die Kippenhahn und Schlüter-Konfiguration einer sogenannten Harrisschicht (vgl. Harris, 1962) mit einem überlagerten, konstanten Magnetfeld in der y -Richtung, dessen Beitrag zur $1/c \underline{J} \times \underline{B}$ -Kraft die Gravitationsenergie genau kompensiert.

Die bis unendlich laufenden Feldlinien sowie das daher fehlende Anschlußfeld, das die Protuberanz mit der Sonnenoberfläche verbinden soll, beschränken die Anwendbarkeit des Kippenhahn-Schlüter-Modells.

4. Modell von Lerche und Low

Lerche und Low betrachten eine Protuberanz, deren Temperatur im allgemeinen räumlich variiert, jedoch berücksichtigen sie nicht die Wärmetransportgleichung. Die Komponente des Magnetfeldes längs der Protuberanzachse ist als konstant vorausgesetzt, was eher den Beobachtungen entspricht. Die für diesen Fall zutreffende Auswahl der Funktionen $B_x(A)$ und $P(A, \phi)$ ist die folgende:

$$B_x(A) = G \quad ; \quad P(A, \phi) = 2\beta \exp \left[\int_0^{A+\phi} \frac{dA'}{T(A', \phi)} - \int_0^\phi \frac{d\phi'}{T(A, \phi')} \right] \quad (\text{III.36})$$

Dabei ist G eine Konstante und β ein typischer Wert des Verhältnisses Gasdruck zum zweifachen des magnetischen Drucks (s. unten). Die Zustandsgleichung (II.12) verbindet die Temperatur T mit der Masendichte und dem Gasdruck:

$$P(A, \phi) = \rho(A, \phi) T(A, \phi) \quad (\text{III.37})$$

Wir benutzen hier folgende Normierung für die Gleichgewichtsgrößen:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\tilde{Y}}{h_0} ; \quad Z = \frac{\tilde{Z}}{h_0} ; \quad B = \frac{\tilde{B}}{B_0} ; \quad A = \frac{\tilde{A}}{h_0 B_0} ; \quad P = \frac{8\pi \tilde{P}}{B_0^2} ; \quad \phi = \frac{\tilde{\phi}}{h_0 g} = Z \\ \rho &= \frac{8\pi g h_0 \tilde{\rho}}{B_0^2} ; \quad T = \frac{\tilde{T}}{T_0} ; \quad J = \frac{4\pi h_0 \tilde{J}}{c B_0} \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Wobei B_0 und T_0 charakteristische Werte für das Magnetfeld und die Temperatur sind; h_0 ist die barometrische Skalenhöhe für T_0 : $h_0 = kT_0/mg$. Wenn P_0 ein typischer Wert für den Gasdruck ist, bekommen wir $\beta = 4\pi P_0/B_0^2$. Wie in den anderen Fällen sind die Größen mit Schlange dimensionsbehaftete Variablen. Die Gleichgewichtsgleichung (II.10) lautet jetzt:

$$\Delta A = -\beta \frac{\partial}{\partial A} \left\{ \exp \left[\int_0^{A+\phi} \frac{dA'}{T(A', \phi)} - \int_0^\phi \frac{d\phi'}{T(A, \phi')} \right] \right\} \quad (\text{III.39})$$

Ähnlich wie beim Modell von Kippenhahn und Schlüter machen Lerche und Low für das Vektorpotential folgenden Ansatz:

$$A = Z + \Psi(R) \quad (\text{III.40})$$

Wobei Ψ eine freie Funktion vom radialen Abstand $R = \sqrt{y^2 + z^2}$ ist.

Ferner machen sie für die Temperatur die Annahme:

$$T(A) = T(A - Z) = T(\Psi) \quad (\text{III.41})$$

Man bekommt sofort für den Druck:

$$P(\Psi) = 2\beta \exp \left[\int_0^\Psi \frac{d\Psi'}{T(\Psi')} \right] \quad (\text{III.42})$$

und aus (III.39) die gewöhnliche Differentialgleichung für :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\Psi}{dR} \right) = -\beta \frac{d}{d\Psi} \left\{ \exp \left[\int_0^\Psi \frac{d\Psi'}{T(\Psi')} \right] \right\} \quad (\text{III.43})$$

Für den Fall einer isothermen Protuberanz haben wir mit $T(\Psi) = 1$ folgende Differentialgleichung zu lösen:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\Psi}{dR} \right) = -\beta e^\Psi \quad (\text{III.44})$$

Die Lösung von (III.44) mit den Bedingungen $\Psi(0) = 0$, $\Psi'(0) = 0$ lautet (vgl. Walker, 1915; Lemke, 1913):

$$\Psi(R) = -2 \ln \left[1 + \frac{1}{8} \beta R^2 \right] \quad (\text{III.45})$$

Folglich erhalten wir für dieses isotherme Gleichgewicht:

$$P = \vartheta = \frac{2\beta}{\left[1 + \frac{\beta}{8} (y^2 + z^2) \right]^2} \quad (\text{III.46})$$

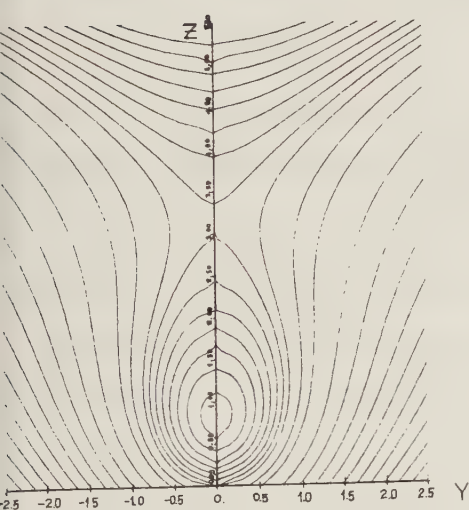
$$\underline{B} = G \underline{e}_x + \left\{ 1 - \frac{\beta z}{2 \left[1 + \frac{\beta}{8} (y^2 + z^2) \right]} \right\} \underline{e}_y + \frac{\beta y}{2 \left[1 + \frac{\beta}{8} (y^2 + z^2) \right]} \underline{e}_z \quad (\text{III.47})$$

$$\underline{J} = -\Delta A \underline{e}_x = \frac{\beta}{\left[1 + \frac{\beta}{8} (y^2 + z^2) \right]^2} \underline{e}_x \quad (\text{III.48})$$

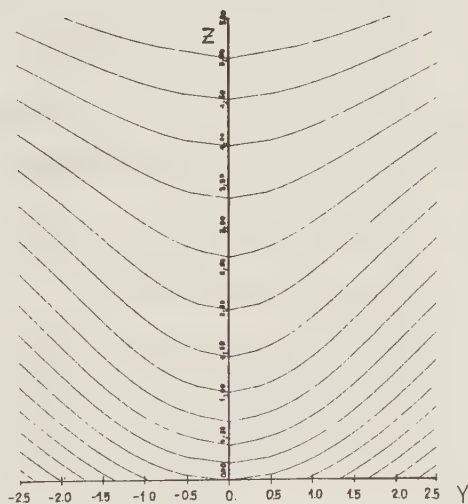
Jede andere Auswahl der Funktion $T(\Psi)$ in (III.43) liefert eine andere exakte Gleichgewichtslösung für die Protuberanz. Damit man sich auf analytische Methoden bei der Suche der Lösung beschränken kann,

haben Lerche und Low anstatt T die Funktion Ψ vorgegeben. Die dazu gehörende Temperaturverteilung $T(\Psi)$ wird dann mittels (III.43) bestimmt. Diese Prozedur bedeutet offensichtlich, daß man für eine vorgegebene Magnetfeldkonfiguration die dazu im Gleichgewicht passende Plasmaverteilung findet. Wir werden uns jedoch in unserer Untersuchung auf den isothermen Fall beschränken.

Die Projektion der Feldlinien auf die (y,z) -Ebene ist durch die Niveaulinien $Z + \Psi(y,z) = \text{konst.}$ gegeben. Die Abb. 5 zeigt verschiedene mögliche Feldkonfigurationen. Wenn $\beta \leq 2$, gibt es nur offene Feldlinien; dagegen für $\beta > 2$ erscheinen zwei Neutralpunkte derart, daß



5a: $\beta = 3$



5b: $\beta = 1$

Abb. 5: Lerche-Low-Modell: Feldlinien

geschlossene Feldlinien zusätzlich auftreten. Die Existenz geschlossener Magnetfeldlinien in der Protuberanz stellt eine interessante Realisierungsmöglichkeit für eine thermische Isolierung der um mehrere Größenordnungen heißeren Korona dar. Das ist verständlich aus der Tatsache, daß die Wärmeleitfähigkeit senkrecht zu den Feldlinien erheblich kleiner als parallel zum Magnetfeld ist.

Lerche und Low betrachten den horizontalen, durch das gebogene Magnetfeld gestützten Plasmazyylinder als einen Kondensationsentwicklungszustand einer Plasmaregion, die anfangs in einem homogenen Magnetfeld lag. Wegen der herrschenden hohen elektrischen Leitfähigkeit werden die Feldlinien von dem fallenden Plasma mitgenommen. Das Sinken der Feldlinien kann durch eine Folge von Gleichgewichtskonfigurationen mit wachsenden β -Werten dargestellt werden. Für kleine β ist das Magnetfeld annähernd homogen und das dünnere Plasma füllt ein ausgedehntes Gebiet. Die zunächst offenen Feldlinien werden bei weiter wachsendem β zusammengeschlossen (reconnection), derart, daß die dadurch entstandenen geschlossenen Feldlinien mit dem Plasma sinken. Das Vorhandensein einer konstanten Magnetfeldkomponente in x-Richtung bedeutet für die geschlossenen Feldlinien, daß das Magnetfeld schraubenförmig entlang der Zylinderachse verläuft. Beobachtungen haben ergeben, daß diese schraubenförmigen Felder häufig bei der disparition brusque der Protuberanz auftreten (Anzer und Tandberg-Hanssen, 1970).

Die Gleichgewichtskonfiguration von Lerche und Low erklärt auf geeignete Weise zahlreiche Protuberanzmerkmale; sie kann aber die unmittelbare Umgebung der Protuberanz nicht beschreiben. Obwohl die Protuberanz praktisch in ein homogenes Feld eingebettet ist, fehlt hier auch das Anschlußfeld, das sie mit den unten liegenden photo-

sphärischen Schichten verbindet.

Das Magnetfeld in diesem Modell hat im Gegensatz zu allen anderen Größen keine Zylindersymmetrie. Dies macht es möglich, bei vorhandenen geschlossenen Feldlinien ($\beta > 2$) und nicht verschwindendem G eine Konfiguration haben zu können, welche eine Art nicht-zentrierten diffusen screw-Pinch darstellt. Falls G verschwindet, entsteht ein nicht zentrierter diffuser z-Pinch. Dabei liegt der jeweilige Pinch in einem asymptotisch homogenen Magnetfeld.

IV. Stabilitätsanalyse

In diesem Kapitel werden wir hauptsächlich die Stabilitätseigenschaften der isothermen Protuberanzmodelle, die in den Abschnitten 1. bis 4. des vorigen Kapitels vorgestellt wurden, untersuchen. Unser Verfahren kann sowohl analytische als auch numerische Stabilitätsaussagen für solche Modelle liefern. Um die numerischen Stabilitätsaussagen erzielen zu können, haben wir ein umfangreiches Computerprogramm entwickelt. Die notwendigen Tests für das Programm werden im Anhang B beschrieben; dabei haben wir die Stabilitätseigenschaften verschiedener Konfigurationen untersucht und Vergleiche mit der Normalmoden-Analyse durchgeführt. Wir diskutieren hier die Ergebnisse in Bezug auf physikalische Prozesse in der Protuberanz und ihre mögliche Anwendung auf Beobachtungen.

1. Analytische Auswertung des Energieprinzips

Wie wir bereits in Kapitel II erläutert haben, liefert das Energieprinzip der MHD ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für Stabilität. Obwohl die Prozedur sich grundsätzlich auf die Untersuchung des Vorzeichens von δW in (II.29) reduziert, bereitet seine praktische Ausführung je nach dem Komplexitätsgrad des zu studierenden Gleichgewichts unterschiedlichen rechnerischen Aufwand. Ausgehend von der Änderung der potentiellen Energie δW ist es manchmal möglich, für relativ einfache Gleichgewichtskonfigurationen Stabilität zu beweisen, indem man mit Hilfe partieller Integrationen und geeigneter Umformungen δW als einen positiv definiten Ausdruck umschreibt.

1.1 Isotherme Atmosphäre in einem homogenen Magnetfeld

Zur Illustration des Verfahrens betrachten wir den besonders einfachen Fall einer isothermen Atmosphäre in einem homogenen Magnetfeld. Wir setzen die Zustandsgleichung (II.12) voraus. Die Gleichgewichtsgleichung (II.8) hat diesmal die folgende Lösung:

$$P = P_0 e^{-\frac{z}{h}}; \quad \mathfrak{F} = \frac{P_0}{gh} e^{-\frac{z}{h}}; \quad \underline{B} = \underline{B}_0 \quad (\text{IV.1})$$

Wobei P_0 , $\underline{B}_0$ und $h = kT/mg$ Konstanten sind. Wir haben daher eine in z -Richtung stratifizierte Atmosphäre, durch die kein elektrischer Strom fließt. Wenn wir $\nabla P = -P/h \underline{e}_z$, $\mathfrak{F} = P/gh$, $\underline{J} = 0$ in (II.29) einsetzen, bekommen wir:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} |\underline{Q}|^2 + \mathfrak{F} P |\nabla \underline{\xi}|^2 + P \left[\frac{1}{h^2} |\underline{\xi}_z|^2 - \frac{1}{h} (\underline{\xi}_z \nabla \cdot \underline{\xi}^* + \underline{\xi}_z^* \nabla \cdot \underline{\xi}) \right] \right\} dV \quad (\text{IV.2})$$

Dabei ist $\underline{Q} = \underline{B}_0 \cdot \nabla \underline{\xi} - \underline{B}_0 \nabla \cdot \underline{\xi}$. Durch das Summieren und Subtrahieren des Terms $P |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2$ erhalten wir sofort:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} |\underline{Q}|^2 + (\mathfrak{F} - 1) |\nabla \cdot \underline{\xi}|^2 + P |\nabla \underline{\xi} - \frac{1}{h} \underline{\xi}_z|^2 \right\} dV \quad (\text{IV.3})$$

Offensichtlich liegt im physikalischen Bereich $\mathfrak{F} \geq 1$ ein positiv definiter Ausdruck für δW vor, d.h. die Gleichgewichtskonfiguration ist stabil gegen beliebige dreidimensionale Verschiebungen.

1.2 Protuberanzmodell von Kippenhahn und Schlüter als Sonderfall einer allgemeinen Gleichgewichtsklasse

Wir haben bereits im Kapitel I auf die zahlreichen Stabilitätsuntersuchungen anderer Autoren hingewiesen, bei denen eine endgültige Antwort auf die Stabilitätsfrage dieses Modells ausblieb. Wir betrachten das Modell im Rahmen einer breiten Gleichgewichtsklasse und benutzen beliebige dreidimensionale Verschiebungen. Das Kippen-

hahn-Schlüter-Modell gehört, wie man aus (III.30) erkennen kann, zu der allgemeinen Gleichgewichtsklasse, deren Vektorpotential die folgende Form annimmt:

$$A(y, z) = \hat{A}(y) + B_y z \quad (\text{IV.4})$$

Wobei B_y eine Konstante und $\hat{A}$ eine beliebige Funktion von y ist. Die Funktion Π in (II.10) sieht für diese Gleichgewichtsklasse folgendermaßen aus:

$$\Pi(A, \phi) = F(A + \alpha \phi) = F(\hat{A}(y)) \quad (\text{IV.5})$$

Dabei ist F eine beliebige Funktion mit der einzigen Bedingung, daß sie für alle physikalisch relevanten Werte von $\hat{A}$ positiv bleibt und $\alpha = -B_y/g$. Die x -Komponente des Magnetfeldes kann bei dieser Gleichgewichtsklasse einen konstanten Wert B_0 annehmen:

$$B_x = B_0 e_x \quad (\text{IV.6})$$

Folglich haben wir eine Magnetfeldkonfiguration der Form:

$$\mathbf{B} = (B_0, B_y, -\hat{A}'(y)) \quad (\text{IV.7})$$

Wir werden mit Hilfe des Ausdrucks (II.35) für δW die Stabilitätseigenschaften dieser Gleichgewichtsklasse untersuchen. Dafür können wir sofort die folgenden Größen aufschreiben:

$$\begin{aligned} B_z &= -\hat{A}' e_z + B_y e_y; \quad \mathbf{a} = -\hat{A}' \hat{e}_y - B_y \hat{e}_z \\ \Delta A &= \hat{A}''; \quad \nabla_\perp \mathbf{a} = -\hat{A}' \nabla_\perp \hat{e}_y - \hat{A}'' \hat{e}_y e_y - B_y \nabla_\perp \hat{e}_z \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Wenn wir die Größen (IV.8) in den ersten Term von (II.35) einsetzen, erhalten wir nach partieller Integration und Benutzung der Randbedingungen (II.27):

$$\frac{1}{8\pi} \int \left\{ |\nabla_{\perp} a|^2 - 4\pi \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \Lambda^2} |a|^2 \right\} dV = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + B_Y \left(\frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Y} - \frac{\hat{A}'' \hat{\xi}_Z}{\hat{A}} \right) \right|^2 + \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Z} \right|^2 \right\} dV \quad (\text{IV.9})$$

Weiterhin bekommen wir für die Terme, die linear in k sind:

$$(\nabla_{\perp} a \times e_x) \cdot (B_0 \hat{\xi}_1^* - \hat{\xi}_x^* B_1) = (B_Y \hat{\xi}_x^* - \hat{\xi}_Y^* B_0) \left(\hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Z} + B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} \right) + (\hat{A}' \hat{\xi}_x^* + B_0 \hat{\xi}_Z^*) \left(\hat{A}' \hat{\xi}_Y + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Y} \right) \quad (\text{IV.10})$$

$$- \Delta A \hat{\xi}_x d^* = \hat{A}'' \hat{\xi}_x (\hat{A}' \hat{\xi}_Y^* + B_Y \hat{\xi}_Z^*) \quad (\text{IV.11})$$

$$- B_0 \Delta A (\hat{\xi}_1 \times \hat{\xi}_1^*) \cdot e_x = \hat{A}' B_0 (\hat{\xi}_Y^* \hat{\xi}_Z - \hat{\xi}_Y \hat{\xi}_Z^*) \quad (\text{IV.12})$$

Für den dritten Term von δW (quadratisch in k) haben wir:

$$|B_0 \hat{\xi}_1 - \hat{\xi}_x B_1|^2 = B_0^2 |\hat{\xi}_Y|^2 + B_Y^2 |\hat{\xi}_x|^2 - B_0 B_Y (\hat{\xi}_Y^* \hat{\xi}_x + \hat{\xi}_Y \hat{\xi}_x^*) + B_0^2 |\hat{\xi}_Z|^2 + (\hat{A}')^2 |\hat{\xi}_x|^2 + B_0 \hat{A}' (\hat{\xi}_Z^* \hat{\xi}_x + \hat{\xi}_Z \hat{\xi}_x^*) \quad (\text{IV.13})$$

Bei der Berücksichtigung von $\text{Im} Z = i(Z^* - Z)/2$ können wir leicht (IV.9), (IV.13) und den in k linearen Term als Summe zweier quadratischer Terme zusammenschreiben, so daß δW die folgende Gestalt annimmt:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + B_Y \left(\frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Y} - \frac{\hat{A}'' \hat{\xi}_Z}{\hat{A}} \right) + i k (\hat{A}' \hat{\xi}_x + B_0 \hat{\xi}_Z) \right|^2 + \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Z} + i k (B_Y \hat{\xi}_x - B_0 \hat{\xi}_Y) \right|^2 \right. \\ \left. + \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Y} - \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Z} - B_0 \left(\frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} \right) + 4\pi \gamma P \left(1 + \frac{s^2}{\mathcal{F} P} \frac{\partial s}{\partial \rho} \right) \right| |\nabla_{\perp} \hat{\xi}|^2 - 4\pi \frac{\partial s}{\partial \rho} \left[g \hat{\xi}_Z + \frac{s}{\partial \rho} \nabla_{\perp} \hat{\xi} \right] \right\} dV \quad (\text{IV.14})$$

Wenn wir jetzt den ersten Term von (IV.14) mit den vierten und fünften Termen desselben Ausdrucks kombinieren, erhalten wir nach einer partiellen Integration den folgenden gesamten Term:

$$4\pi P |\nabla \hat{\mathcal{E}}|^2 + (-4\pi g^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\hat{A}''}{\hat{A}'} B_T^2) |\hat{\mathcal{E}}_z|^2 - (B_Y \hat{A}'' + 4\pi g g) [\hat{\mathcal{E}}_z \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_Y^*}{\partial Y} + \hat{\mathcal{E}}_z^* \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_Y}{\partial Y} + i k (\hat{\mathcal{E}}_z^* \hat{\mathcal{E}}_x - \hat{\mathcal{E}}_x^* \hat{\mathcal{E}}_z)] \\ + |B_Y \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_x}{\partial Y} + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}_Y}{\partial Y} + i k (\hat{A}' \hat{\mathcal{E}}_x + B_x \hat{\mathcal{E}}_z)|^2 \quad (\text{IV.15})$$

Wir werden zeigen, daß die Vorfaktoren des zweiten und dritten Termes in (IV.15) für die hier studierte Gleichgewichtsklasse verschwinden. Die Gleichgewichtsgleichung (II.10) lautet bei Anwendung von (IV.4) und (IV.5):

$$-\hat{A}'' = 4\pi \frac{\partial F}{\partial A} = 4\pi F'(\hat{A}) \quad (\text{IV.16})$$

Die Massendichte ist nach (II.11) gegeben als:

$$g = -\frac{\partial P}{\partial \phi} = \alpha F'(\hat{A}) \quad (\text{IV.17})$$

Aus (IV.16) und (IV.17) folgt sofort:

$$\hat{A}'' - \frac{4\pi}{\alpha} g = 0 \quad (\text{IV.18})$$

Andererseits, wenn wir (IV.17) und (IV.18) nach y ableiten, erhalten wir:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\alpha F''(\hat{A}) \hat{A}' \quad (\text{IV.19})$$

$$\hat{A}''' = \frac{4\pi}{\alpha} \frac{\partial g}{\partial y} \quad (\text{IV.20})$$

Die Ableitung von g nach ϕ bekommen wir aus (IV.17):

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = -\alpha^2 F''(\hat{A}) \quad (\text{IV.21})$$

Das Einsetzen von (IV.19) und (IV.21) in (IV.20) führt zu dem gesuchten Ausdruck:

$$\frac{\hat{A}'''}{\hat{A}'} - \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\partial g}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

(IV.18) und (IV.22) zeigen in der Tat, daß der Term (IV.15) als Summe von zwei quadratischen Summanden zu schreiben ist. Damit erhalten wir die endgültige Form für δW als einen positiv definiten Ausdruck:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Y} - \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Z} - B_0 \left(\frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} \right) \right|^2 + \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Z}{\partial Z} + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Z} + iK (B_Y \hat{\xi}_x - B_0 \hat{\xi}_Y) \right|^2 + \left| B_Y \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + \hat{A}' \frac{\partial \hat{\xi}_Y}{\partial Y} + iK (\hat{A}' \hat{\xi}_x + B_0 \hat{\xi}_Z) \right|^2 + 4\pi \mathcal{P} |\nabla \cdot \hat{\xi}|^2 \right\} dV \quad (IV.23)$$

Wir haben daher die Stabilität der durch (IV.4) bis (IV.6) definierten Gleichgewichtsklasse gegen beliebige dreidimensionale Verschiebungen bewiesen. Alternativ zu dem hier gegebenen Beweis kann man auch direkt von δW in der Form (II.29) ausgehen (Galindo und Schindler, 1984). Als ein Sonderfall der hier behandelten Gleichgewichtsklasse haben wir dabei ebenfalls die Stabilität des Kippenhahn und Schlüter-Modells gezeigt. Wie man aus der Form des Vektorpotentials in (IV.4) erkennen kann, beschreiben die hier studierten Gleichgewichte eine eindimensionale Stromschicht mit einem überlagerten horizontalen Magnetfeld. In dieser Hinsicht können wir unser Ergebnis als eine Verallgemeinerung des Resultates betrachten, nach dem eindimensionale Stromschichten in Abwesenheit eines Gravitationsfeldes MHD-stabil sind (Schindler und Soop, 1968).

Das Modell von Kippenhahn und Schlüter ist bisher von verschiedenen Autoren (s. Abschnitt I.2) auf Stabilität untersucht worden, aber alle Autoren haben spezielle Verschiebungen vorausgesetzt, was die Möglichkeit einer globalen Stabilitätsaussage beträchtlich beschränkt. Dagegen ist unser Ergebnis angesichts der angewandten allgemeinen Verschiebungen globaler Natur.

Nach der analytischen Auswertung des Variationsprinzips für dieses

Modell werden wir später mit Hilfe numerischer Methoden die resultierenden stabilen Schwingungsmoden und die zugehörigen Schwingungsfrequenzen bestimmen.

1.3 Analytische Stabilitätsaussagen für Protuberanzmodelle bei speziellen Verschiebungen

In diesem Abschnitt werden wir weiter das MHD-Energieprinzip auf andere Protuberanzmodelle anwenden, wobei wir uns wegen erhöhter Komplexität der Konfigurationen nur auf spezielle Verschiebungsklassen beschränken. Allgemeinere Stabilitätsaussagen können erst gewonnen werden, wenn man beliebige dreidimensionale Verschiebungen zuläßt; zu dieser Problematik werden wir später in diesem Kapitel zurückkehren.

1.3.1 Modell von Dungey

Wir benutzen erneut den Ausdruck (II.35) für die Änderung δW der potentiellen Energie. In diesem Fall haben wir $B_x = 0$ und nach (III.15), $\Pi(A, \phi) \sim A$. Wenn wir jetzt den ersten und den dritten Term zusammen mit den ersten Summanden des in k linearen Terms kombinieren, können wir δW folgendermaßen schreiben:

$$\delta W = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{4\pi} |\nabla_1 \hat{a} \times \underline{e}_x - i k \hat{\xi}_x \underline{B}_1|^2 + \frac{1}{4\pi} |\underline{B}_1 \cdot \nabla_1 \hat{\xi}_x|^2 + (\gamma - 1) P |\nabla \cdot \hat{\xi}|^2 + \frac{1}{h_0^2} P |\hat{\xi}_z - h_0 \nabla \cdot \hat{\xi}|^2 \right\} dV$$

$$- \frac{k}{4\pi} \operatorname{Im} \int \{ \Delta A \hat{\xi}_x \hat{a}^* \} dV \quad (\text{IV.24})$$

Dabei haben wir bereits die für dieses Gleichgewicht gültigen Identitäten eingesetzt:

$$\vartheta = \frac{1}{h_0 g} P \quad (\text{IV.25})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{h_0^2 g^2} P \quad (\text{IV.26})$$

Wie man sofort aus (IV.24) erkennen kann, folgt Stabilität für den Fall $k = 0$, d.h. die angewandte Verschiebung hängt nach (II.32) nicht von x ab.

An dieser Stelle ist es angebracht, die Bedeutung einer Stabilitätsaussage bezüglich einer bestimmten Verschiebungsklasse näher zu diskutieren. Als Folge einer von außen eingebrachten Störung wird die dynamische Entwicklung des Systems durch die Gleichung (II.16) beschrieben. Aus der zugehörigen Eigenwertgleichung (II.20) folgt, daß physikalisch realisierbare Verschiebungen für alle Zeiten Eigenfunktionen des Operators $\underline{F}(\underline{\xi})/\rho_0$ sein müssen. Für den Fall einer speziellen Verschiebungsklasse bedeutet das in erster Linie, daß, wenn anfangs eine Verschiebung zu einer vorgegebenen Klasse gehört, sie im Laufe der dynamischen Entwicklung des Systems stets zu derselben Klasse gehören muß. Das Auftreten dieses Verhaltens kann man offensichtlich anhand der Eigenwertgleichungen (II.20) direkt nachprüfen. Diese vektorielle Eigenwertgleichung enthält sechs Gleichungen für den Real- und Imaginärteil der drei Komponenten der Verschiebung $\underline{\xi}$, so daß im allgemeinen ein gekoppeltes partielles Differentialgleichungssystem vorliegt.

Das Verschwinden der k -abhängigen Terme führt zu einer Entkopplung der Gleichungen, derart daß man zwei identischen Differentialgleichungssysteme für den Real- und Imaginärteil der Verschiebung hat (s. Anhang C). Man erhält aufgrund der identischen Gleichungen in gewisser Weise eine verdoppelte Information, was dem Auftreten sowohl rein reeller als auch rein imaginärer zweidimensionaler

Verschiebungen mit jeweils drei Komponenten verschieden von Null entspricht.

Wir haben im Fall des Dungey-Modells zusätzlich die Bedingung $B_x = 0$. Das bedeutet eine weitere Beschränkung in der Verschiebungs-
klasse mit $k = 0$. Wie man direkt aus den Gleichungen erkennen kann,
sind die Fälle ($\xi_x \equiv 0, \xi_y \neq 0, \xi_z \neq 0$) und ($\xi_x \neq 0, \xi_y = \xi_z \equiv 0$)
die einzigen Kombinationen, bei denen das Differentialgleichungs-
system lösbar ist; andere Kombinationen führen zu einem überbe-
stimmten System (s. Anhang C). Gegen diese speziellen zweidimensio-
nalen Verschiebungen ist das Dungey-Modell dann stabil.

Wie man aus (IV.24) entnehmen kann, können gleichfalls rein reelle
und rein imaginäre, dreidimensionale (d.h. $k \neq 0$) Verschiebungen
den in k -linearen Term zum Verschwinden bringen. Jedoch ist es
leicht zu verifizieren, daß in diesem Fall das Differentialglei-
chungssystem (II.20) überbestimmt ist. Eine Stabilitätsaussage
ist daher für eine solche Verschiebungs-kategorie nicht möglich.

1.3.2 Modell von Menzel

Analog zu dem vorigen Modell läßt sich die Änderung der potentiell-
len Energie δW für das Menzel'sche Gleichgewicht in eine Gestalt
bringen, bei der man den Einsatz spezieller Verschiebungen auf das
System näher untersuchen kann. Von dem Ausdruck (II.35) ausgehend
können wir mit Hilfe der Gleichgewichtsgrößen (III.3), (III.7) bis
(III.9) δW für dieses Modell spezialisieren. Dabei benutzen wir au-
ßer der Normierung (III.6) noch die zusätzlichen normierten Größen:

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{2h} ; \delta W = \frac{8\pi\delta\tilde{W}}{2h \cdot f^2} \quad (\text{IV.27})$$

Nach geeigneter Umformung einzelner Terme in δW mittels partieller Integration sowie der Benutzung der Randbedingungen (II.27) erhalten wir:

$$\delta W = \int \left\{ \left| \left(\hat{\xi}_y + \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial y} \right) f + \left(\hat{\xi}_z - \frac{\partial \hat{\xi}_y}{\partial z} - i k \hat{\xi}_x \right) f' \right|^2 + \left| \left(\frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} - \hat{\xi}_z + i k \hat{\xi}_x \right) f + \left(\hat{\xi}_y - \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} \right) f' \right|^2 \right. \\ \left. + \frac{r}{2} \left| \frac{\partial \hat{\xi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} + i k \hat{\xi}_x - 2 \hat{\xi}_z \right| f^{2-2q} + \left| \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial y} f + \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial z} f' \right|^2 + (j-1) \frac{r}{2} \left| \frac{\partial \hat{\xi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} + i k \hat{\xi}_x \right| f^{2-2q} + r q \left(|\hat{\xi}_z|^2 - |\hat{\xi}_y|^2 \right) f^{2q} \right\} e^{-2Z} d^2 r \quad (\text{IV.28})$$

wobei wir bereits die x-Integration (welche wegen der Zweidimensionalität des Gleichgewichts und der angenommenen x-Abhängigkeit für die Verschiebung $\hat{\xi}$ irrelevant ist) ausgeführt haben.

Wie man sofort aus (IV.28) erkennen kann, macht die Verschiebungs-klasse mit $\hat{\xi}_y \equiv 0$ das Funktional δW positiv definit und daher ebenso die Unterklasse mit zusätzlich $\hat{\xi}_x \equiv 0$, d.h. rein vertikalen Verschiebungen. Brown (1958) hat diese Unterklasse für das Menzel'sche Modell bereits untersucht und dasselbe Resultat bekommen. Er schließt daraus Stabilität gegen diese speziellen Verschiebungen. Andererseits haben wir schon in dem vorigen Absatz die Problematik der Stabilitätsaussagen in Bezug auf spezielle Verschiebungen erläutert. Nach Überprüfung der Eigenwertgleichung (II.20) findet man, daß für die beiden Verschiebungs-klassen ein überbestimmtes Differentialgleichungssystem vorliegt. Das bedeutet daher, daß, wenn anfangs die Verschiebung zwei bzw. eine einzige räumliche Komponente besitzt, im Laufe der dynamischen Entwicklung des Systems die fehlenden Komponenten erscheinen werden. Dadurch verlieren die auf diese Verschiebungsklassen bezogenen Stabilitätsaussagen jeden Sinn.

Wir wollen jetzt den Fall rein horizontaler Verschiebungen betrachten, d.h. $\hat{\underline{\xi}}_x \equiv 0$, $\hat{\underline{\xi}}_z \equiv 0$ mit $\hat{\underline{\xi}}_y \neq 0$. Nach partieller Integration des Produkts der beiden Summanden im ersten Term von (IV.27) erhalten wir den folgenden positiv definiten Ausdruck:

$$\delta W = \int \left\{ \left(\left| \frac{\partial \hat{\underline{\xi}}_y}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \hat{\underline{\xi}}_y}{\partial z} \right|^2 \right) f'^2 + \frac{r}{2} r' \left| \frac{\partial \hat{\underline{\xi}}_y}{\partial y} \right|^2 f^{-2q} \right\} e^{-2z} d^2 r \quad (\text{IV.29})$$

Brown (1958) hat ebenfalls diese speziellen Verschiebungen untersucht. Aufgrund seiner numerischen Rechnungen hat er die Vermutung geäußert, daß das Menzel'sche Gleichgewicht gegen rein horizontale Verschiebungen stabil sein könnte. Wir finden jedoch auch für diesen Fall ein überbestimmtes Eigenwertgleichungssystem (II.20), so daß eine solche Stabilitätsaussage für das System irrelevant ist.

Wir betrachten zuletzt den Fall der speziellen Verschiebungen mit $|\hat{\underline{\xi}}_z| = |\hat{\underline{\xi}}_y|$. Obwohl dadurch δW laut (IV.28) positiv definit wird, führt die zusätzliche Bedingung wiederum zu der Überbestimmung des Eigenwertgleichungssystems (II.20). Daher ist auch hier keine Stabilitätsaussage möglich.

1.3.3 Modell von Lerche und Low

Dieses Gleichgewicht besitzt eine relativ komplizierte Abhängigkeit von den Raumkoordinaten. Wir berücksichtigen deshalb nur zweidimensionale Verschiebungen, d.h. $k = 0$. Wie wir bereits oben erklärt haben, bedeutet dies, daß wir es entweder mit rein reellen oder rein imaginären Verschiebungen zu tun haben. Ferner nehmen wir an, daß die Komponente des Magnetfeldes längs der Protuberanzachse B_x verschwindet. Die Zusatzbedingung $\hat{\underline{\xi}}_y = 0$, $\hat{\underline{\xi}}_z = 0$ mit $\hat{\underline{\xi}}_x \neq 0$ definiert eine Verschiebungsklasse, deren Mitglieder δW positiv definit

machen. In der Tat, wir setzen das Gleichgewichtsfeld (III.47) in den Ausdruck (II.35) ein. Dabei benutzen wir außer der Normierung (III.38) noch die folgenden normierten Größen:

$$\xi = \frac{\tilde{\xi}}{h_0} ; \quad \delta W = \frac{8\pi \delta W}{B_0^2 h_0^3} \quad (\text{IV.30})$$

Wir erhalten sofort für das isotherme Lerche-Low-Gleichgewicht:

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \left| \left[2 - \frac{\beta Z}{\left[1 + \frac{\beta}{8}(Y^2 + Z^2)\right]} \right] \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Y} + \frac{\beta Y}{\left[1 + \frac{\beta}{8}(Y^2 + Z^2)\right]} \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial Z} \right|^2 \right\} d^2 r \quad (\text{IV.31})$$

Andererseits ist es leicht zu überprüfen, daß das Eigenwertproblem (II.20) wohldefiniert ist, d.h. wir haben jeweils eine (identische) Differentialgleichung für den Real- und Imaginärteil der zweidimensionalen Verschiebung $\hat{\xi}_x$. Wir können daher folgende Stabilitätsaussage machen: Das Lerche und Low-Gleichgewicht mit $B_x = 0$ ist stabil gegen zweidimensionale, rein reelle und rein imaginäre Verschiebungen längs der Protuberanzachse.

Die in den vorigen Absätzen diskutierten Modelle erfüllen die Bedingung $B_x = 0$; wenn wir daher erneut die Verschiebungsklasse mit $k = 0$, $\hat{\xi}_y = \hat{\xi}_z = 0$ und $\hat{\xi}_x \neq 0$ für die drei Modelle berücksichtigen, erhalten wir direkt aus (II.35) den folgenden positiv definiten Ausdruck:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int |\underline{B}_1 \cdot \nabla_1 \hat{\xi}_x|^2 d^2 r \quad (\text{IV.32})$$

Diese spezielle Verschiebungsklasse führt wiederholt zu einem wohldefinierten parabolischen Eigenwertproblem (II.20) für beide Teile der komplexen Größe $\hat{\xi}_x$, so daß die oben in diesem Absatz gemachte Stabilitätsaussage ebenfalls für die drei anderen Modelle gilt.

2. Numerische Auswertung des Energieprinzips für verschiedene Protuberanzmodelle

Wir werden jetzt die Stabilitätseigenschaften der in den Abschnitten III.1 bis III.2 beschriebenen und auf eine einheitliche Form gebrachten Protuberanzmodelle durch die numerische Auswertung des Energieprinzips untersuchen. Wir wollen uns dabei auf den tiefsten Eigenwert $\omega_{\min}^2$ und die assoziierte minimisierende Mode konzentrieren. Um die unterschiedlichen physikalischen Effekte bei der Störung des Gleichgewichtes deutlich zu erkennen, haben wir das Funktional $\delta W_{\min}$ in drei Anteile zerlegt:

$$\delta W_{\min} = \delta M(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) + \delta K(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) + \delta G(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) = \omega_{\min}^2 \quad (\text{IV.33})$$

Dabei ist (in zweiter Ordnung)

$$\begin{aligned} \delta M(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) &= \frac{-1}{2c} \int \left\{ [\mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_1] \cdot \xi_{\min}^* \right\} dV \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ [\mathbf{B} \times (\nabla \times (\nabla \times (\xi_{\min} \times \mathbf{B})) - (\nabla \times \mathbf{B}) \times (\nabla \times (\xi_{\min} \times \mathbf{B}))] \cdot \xi_{\min}^* \right\} dV \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

der Betrag der Lorentz-Kraft ("elektromagnetischer Anteil"),

$$\delta K(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) = \frac{1}{2} \int (\nabla p_1 \cdot \xi_{\min}^*) dV = \frac{-1}{2} \int \left\{ \nabla (\xi_{\min} \cdot \nabla p + \nabla p \cdot \xi_{\min}) \cdot \xi_{\min}^* \right\} dV \quad (\text{IV.35})$$

der Betrag der Druckkraft ("Kompressionsanteil"),

$$\delta G(\xi_{\min}, \xi_{\min}^*) = \frac{1}{2} \int \left\{ g_1 \nabla \phi \cdot \xi_{\min}^* \right\} dV = \frac{-1}{2} \int \left\{ \nabla \cdot (g \xi_{\min}) (\xi_{\min}^* \cdot \nabla \phi) \right\} dV \quad (\text{IV.36})$$

der Betrag der Gravitationskraft ("Gravitationsanteil"). Unser Verfahren liefert die drei Komponenten von δW für sämtliche Eigenmoden mit. Bei der Anwendung auf die Protuberanzmodelle haben wir uns für eine Folge ineinander geschachtelter Diskretisierungsnetze entschieden; dies gewährleistet einen monoton sinkenden Verlauf für

$\omega_{\min}^2$ beim Übergang auf ein feineres Netz (s. Anhänge A und B). Wir haben eine Folge von Netzen mit 2, 4, 8, 16 und 32 Elementen und die Randbedingung $\xi|_{\text{Rand}} = 0$ benutzt. Für alle Modelle haben wir einen Adiabatenkoeffizienten $\gamma = 5/3$ angenommen, was einem idealen Gas mit drei Freiheitsgraden entspricht.

Wenn stabiles Verhalten vorliegt, erlaubt unser Verfahren ebenfalls die Beschreibung der Oszillationen im System. Eine solche Situation werden wir zunächst betrachten.

2.1 Modell von Kippenhahn und Schlüter

Wie wir bereits in Absatz 1.2 bewiesen haben, ist dieses Modell gegen beliebige Verschiebungen stabil. Demgemäß erhalten wir mit unserem Verfahren stets ein positives δW für alle Parameter. Wir werden hier die Grundfrequenz der stabilen Schwingungen als Funktion der Parameter bestimmen und die Schwingungen ausführlich beschreiben. In diesem Fall benutzen wir neben der Normierung (III.31) noch die folgenden normierten Größen:

$$X = \frac{\tilde{x}}{L}; \quad \xi = \frac{\tilde{\xi}}{L}; \quad k = L\tilde{k}; \quad \delta W = \frac{4\pi\delta\tilde{W}}{B_\infty^2 L^3}; \quad \omega^2 = \frac{L\tilde{\omega}^2}{g} \quad (\text{IV.37})$$

Dabei ist $L = 2h_0/r$. Als freie Parameter haben wir neben der Neigung der Feldlinien im Unendlichen $r = B_\infty/B_y$ noch die Wellenzahl k sowie die Abmessung (Y, Z) des Plasmagebietes.

2.1.1 Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen

Wir wollen zum Zwecke eines späteren Vergleichs mit den Beobachtungen zunächst die stabilen Grundschwingungen für den in ruhenden Protuberanzen realisierten Parameterbereich betrachten. Für eine

typische Protuberanztemperatur $T = 7 \cdot 10^3$ °K erhalten wir $h_0 = 211$ km. Ferner nehmen wir einen relativ flachen Verlauf der Feldlinien mit einem Neigungswinkel etwa 15° an (s. z.B. Sakai und Nishikawa, 1983), so daß $r = 0,25$; wir berücksichtigen die durchschnittlichen Abmessungen $\tilde{Y} = 5 \cdot 10^3$ km, $\tilde{Z} = 1,5 - 5 \cdot 10^4$ km, d.h. $Y = 2,96$ und $Z = 8,88 - 29,6$. Nach Betrachtungen periodischer Strukturen in ruhenden Protuberanzen (Nakagawa und McKim Malville, 1969) erhält man das k-Intervall $0,78 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-1} \leq \tilde{k} \leq 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ km}^{-1}$, was mit unserer Normierung $0,13 \leq k \leq 0,52$ entspricht. Die Tabelle 1 zeigt $\omega_{\min}^2$, die Frequenz $\nu_{\min} = \sqrt{g/L} \omega_{\min} / 2\pi$ sowie die Periode $P = 1/\nu_{\min}$ für die oben erwähnten Parameter. Die erhaltenen Perioden sind praktisch konstant für alle Fälle.

Tabelle 1: Kippenhahn-Schlüter-Modell: $\omega_{\min}^2$, Grundfrequenz $\nu_{\min}$ sowie Periode beim beobachteten Parameterbereich
(32 Elemente: $M = 32$)

k	Y	Z	r	$\omega_{\min}^2$	$\nu_{\min} (10^{-3} \text{s}^{-1})$	P (Min)
0,13	2,96	29,6	0,25	0,2493	1,0124	16,459
0,3	2,96	29,6	0,25	0,2492	1,0122	16,464
0,5	2,96	29,6	0,25	0,2489	1,0116	16,474
0,13	2,96	8,88	0,25	0,2508	1,0155	16,411
0,3	2,96	8,88	0,25	0,2506	1,0152	16,416
0,5	2,96	8,88	0,25	0,2503	1,0145	16,427

Wir betrachten die Grundmode (kleinstes $\omega_{\min}^2$), die wir später mit der beobachteten Schwingung vergleichen werden. Wegen $B_x = 0$ kann man hier die Mode allgemein schreiben als $\underline{\xi} = (\underline{\xi}_{x-x} e_x + \underline{\xi}_{\perp}) e^{ikx}$, wobei $\underline{\xi}_x$ rein imaginär und $\underline{\xi}_{\perp}$ rein reell angenommen werden kann (s. Anhang C). Deshalb genügt es, drei reelle Funktionen zu betrach-

ten. Die Abb. 5a stellt $\hat{\mathcal{E}}_{\perp}$ als Funktion des Ortes in der (y,z) -Ebene für einen der oben betrachteten Fälle dar. Die Pfeile veranschauli-

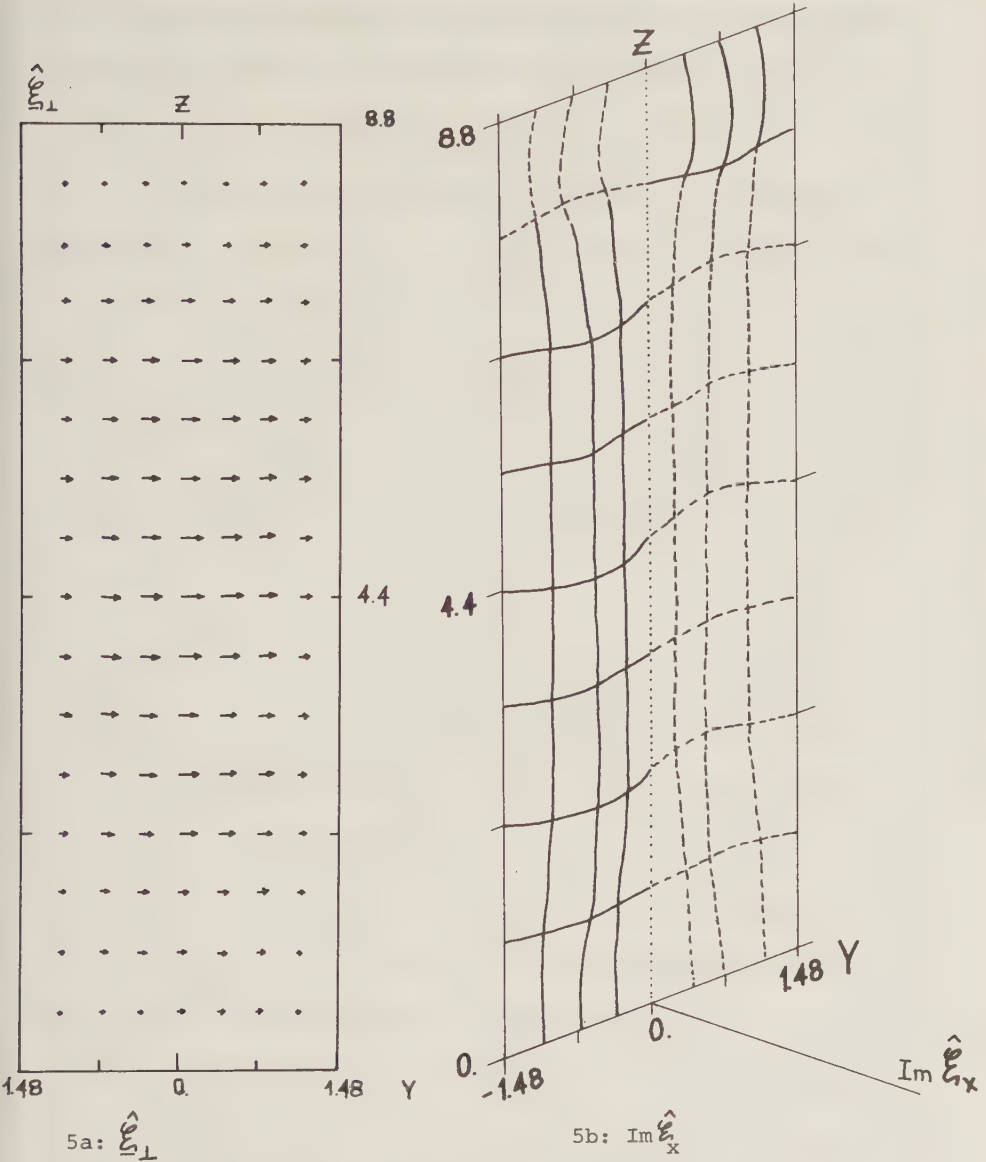


Abb. 5: Kippenhahn-Schlüter-Modell: Grundmode für beobachtete Parameter; $k=0,5$; $r=0,25$; $Y=2,96$; $Z=8,8$; $\omega_{\min}^2=0,2503$.

chen die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitselemente. Als gemeinsame Eigenschaft aller Fälle besteht die Tendenz der Flüssigkeitselemente, sich entlang der Magnetfeldlinien zu bewegen. Die Polarisation der Schwingungen ist vorwiegend horizontal, wobei die maximale Amplitude im Zentralgebiet erreicht wird. Die zugehörige Komponente $\hat{\epsilon}_x$ wird in der Abb. 5b gezeigt. Ihre maximale Amplitude wird ungefähr bei $(\pm 0,74, 2,2)$ erreicht. Aus den Verhältnissen $|\hat{\epsilon}_y \text{ MAX} / \hat{\epsilon}_x \text{ MAX}| = 210$ und $|\hat{\epsilon}_y \text{ MAX} / \hat{\epsilon}_z \text{ MAX}| = 14$ folgern wir, daß die Protuberanz im wesentlichen senkrecht zu ihrer Ebene Schwingungen ausführt. Das gilt für alle betrachteten Fälle im beobachteten Parameterbereich. Wir stellen durch die Bestimmung der einzelnen Komponenten von δW fest, daß die Schwingungsenergie hauptsächlich zu etwa 2/3 aus Kompressions- und zu 1/3 aus Gravitationsanteilen besteht. Der elektromagnetische Anteil spielt dabei eine unwesentliche Rolle.

Bisher sind überwiegend horizontale Schwingungen in ruhenden Protuberanzen nach starken Flares registriert worden (s. z.B. Kleczek und Kuperus, 1969); ihre Periode variiert von der einen zur anderen Protuberanz, aber liegt typischerweise zwischen 6 und 40 Minuten (s. z.B. Ramsey und Smith, 1966). Kürzlich wurden Perioden sogar bis 76 - 82 Minuten gemessen (Bashkirtsev et al., 1982). Wir können daher schließen, daß die Grundmode des Kippenhahn-Schlüter-Modells einen realistischen Wert für die beobachtete Schwingungsperiode liefert. Ferner kann es ausreichend gut die beobachteten horizontalen Schwingungen in ruhenden Protuberanzen erklären.

2.1.2 Andere Parameterbereiche

Wir werden jetzt allgemeine Eigenschaften der Schwingungen außer-

halb des in ruhenden Protuberanzen realisierten Parameterbereichs betrachten. Wir nehmen zunächst $Y = Z = 1$ und variieren die anderen Parameter durch. Die Tabelle 2 zeigt exemplarisch für ausgewählte Parametersätze den Verlauf des tiefsten Eigenwertes $\omega_{\min}^2$

Tabelle 2: Kippenhahn-Schlüter-Modell: tiefster Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für verschiedene Parameter und Netze mit M-Elementen

k	Y	Z	r	$\omega_{\min}^2$ M = 2	$\omega_{\min}^2$ M = 4	$\omega_{\min}^2$ M = 8	$\omega_{\min}^2$ M = 16	$\omega_{\min}^2$ M = 32
1	1	1	1	12,693	8,560	7,952	7,130	6,651
1	1	1	0,1	1,392	0,961	0,855	0,829	0,826
1	1	1	0,01	0,139	0,096	0,085	0,083	0,082
1	1	1	10	17,587	8,872	7,319	5,672	4,413
0	1	1	1	12,695	8,660	8,047	7,164	6,667
0	1	1	0,1	1,392	0,961	0,856	0,829	0,826
0	1	1	0,01	0,139	0,096	0,085	0,083	0,082
0	1	1	10	8,800	4,586	3,017	2,860	2,320
10	1	1	1	12,690	6,814	6,090	5,638	5,561
10	1	1	10	70,877	17,903	13,630	6,111	4,067
20	1	1	1	12,690	6,521	5,721	5,193	5,111

für verschiedene Diskretisierungsnetze. Die Konvergenz von $\omega_{\min}^2$ ist besser bei flachen ($r < 1$) als bei steilen ($r > 1$) Feldlinien. Der Grund ist, daß ein größerer r-Wert eine stark um $y = 0$ konzentrierte Stromschicht zur Folge hat; das erfordert entsprechend höhere Auflösung durch ein feineres Diskretisierungsnetz. Wenn wir jetzt das Plasmagebiet vergrößern, erhalten wir eine Absenkung von $\omega_{\min}^2$. Die Abb. 6 zeigt diesen erwarteten Wandeffect. Wir wollen hier kurz typische Verläufe von $\omega_{\min}^2$ als Funktion der Parameter

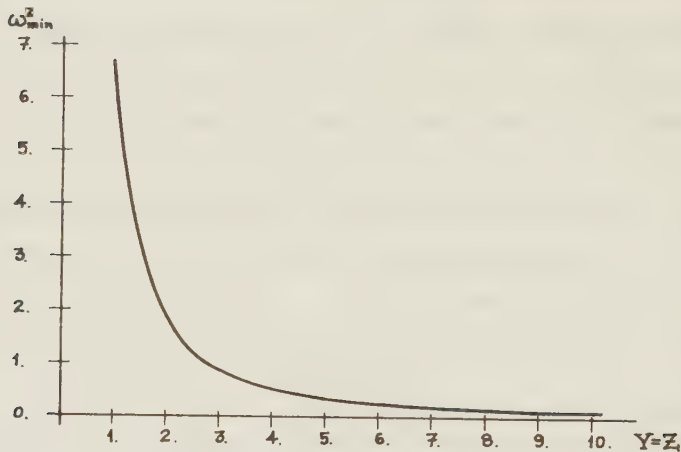
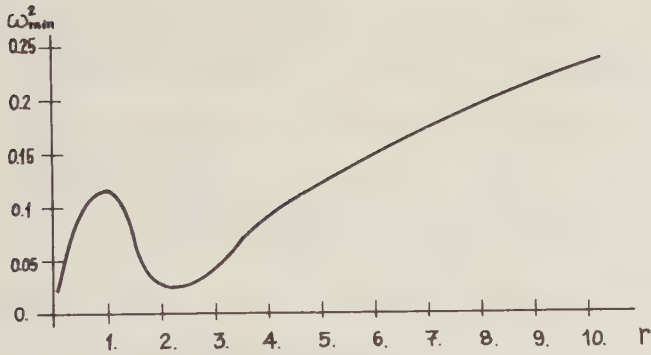


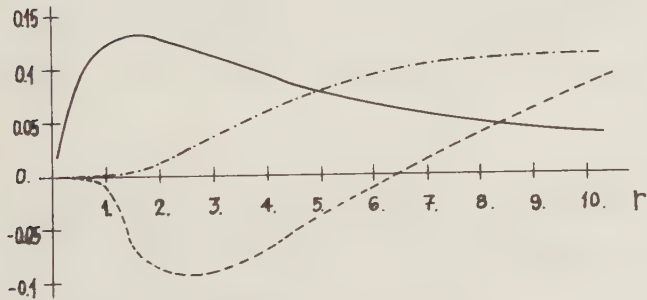
Abb. 6: Kippenhahn-Schlüter-Modell: Tiefster Eigenwert als Funktion der Abmessung $Y = Z$ des Plasmagebietes; $k = 1$, $r = 1$.

vorstellen. Die Abb. 7a zeigt den nicht monotonen Verlauf von $\omega_{\min}^2$ bei zunehmendem Neigungswinkel der Feldlinien. Ein solcher Verlauf ist in seinen Grundzügen charakteristisch für alle gewählten k -Werte. Um die Wichtigkeit der beteiligten physikalischen Prozesse abzuschätzen, haben wir die Aufteilung der Grundschwingungsenergie bestimmt; die Abb. 7b zeigt sie. Anders als beim in Protuberanzen realisierten Parameterbereich ist der Schwingungsvorgang bis zu etwa $r = 1$ ($\theta = 45^\circ$) überwiegend durch die Gravitationskraft bestimmt. Andererseits gilt $r^2 = \text{Max} (P_{\text{Plasma}}/P_{\text{Mag}})$. Wenn dann der magnetische Druck kleiner als der Plasmadruck wird, wirken die elektromagnetischen Kräfte destabilisierend, so daß der muldenartige Verlauf von $\omega_{\min}^2$ im mittleren r -Bereich entsteht (s. Abb. 7a).

Für noch größere r -Werte, d.h. bei sehr steilen Feldlinien sind die Schwingungen ungefähr gleichmäßig durch Kompressions-, Gravi-



7a: Tiefster Eigenwert als Funktion von r
 $r = \tan \theta$, θ : Neigungswinkel der Feldlinien im Unendlichen



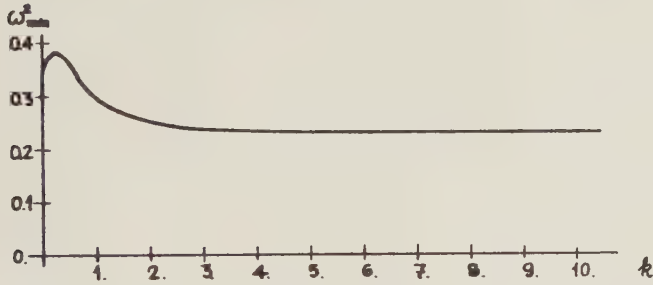
7b: Aufteilung der Grundschwingungsenergie als Funktion von r .
 — Gravitationsanteil; - - - - - elektromagnetischer Anteil;
 - · - · - Kompressionsanteil.

Abb. 7: Kippenhahn-Schlüter-Modell: $Y = Z = 10$; $k = 10$.

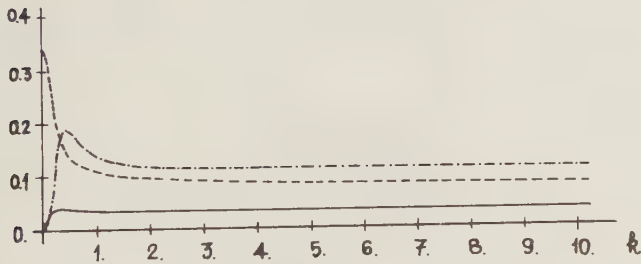
tations- und elektromagnetische Kräfte bestimmt.

Der typische Verlauf von $\omega_{\min}^2$ als Funktion der Wellenzahl wird in der Abb. 8a dargestellt. Die bei $k > 1$ schwache Abhängigkeit der Grundfrequenz wiederholt sich im wesentlichen für alle r -Werte. Auffallend ist die Abnahme von $\omega_{\min}^2$ über einen weiten Wellenzahlbereich, obwohl δW einen Term proportional zu k^2 enthält. Dies kommt daher, daß k und $\hat{\mathcal{E}}_x$ im Energieprinzip (s. Absatz 3.3, Kapitel II) nur als Produkt $k\hat{\mathcal{E}}_x$ auftreten; damit wird eine Zunahme der Wellenzahl durch eine Verkleinerung der Amplitude von $\hat{\mathcal{E}}_x (\sim 1/k)$ ausgeglichen, so daß $\omega_{\min}^2$ sich dabei praktisch nur schwach ändert. Die Abb. 8b zeigt die dazugehörige Energieaufteilung. Bei sehr kleinen Wellenzahlen werden die Schwingungen vorwiegend durch die Lorentzkraft bestimmt. Für große Wellenzahlen stehen die drei Kräfte in einem fast konstanten Verhältnis zueinander. Für andere r -Werte ändern sich entsprechend diese Verhältnisse (s. Abb. 7b), jedoch zeigen sie erneut den konstanten Verlauf über den größten Teil des k -Bereichs.

Wie im Fall des in Protuberanzen realisierten Parameterbereichs schwingen die Flüssigkeitselemente in der (y,z) -Ebene zum größten Teil entlang der Feldlinien. Die Komponente $\hat{\mathcal{E}}_x$ kann sogar größere Amplitude als $\hat{\mathcal{E}}_1$ haben. Ein solcher Fall wird in der Abb. 9 dargestellt. Der große r -Wert entspricht einem Neigungswinkel von 84° . Die Schwingung in der (y,z) -Ebene ist vorwiegend vertikal, sogar bei $y = 0$, wo die Feldlinien für alle r horizontal sind. Andererseits ist die Komponente $\text{Im}\hat{\mathcal{E}}_x$ symmetrisch um $y = 0$ und erreicht ihr Maximum bei etwa $(0, 0,25)$; während $\left| \hat{\mathcal{E}}_x \text{ MAX} / \hat{\mathcal{E}}_z \text{ MAX} \right|$ etwa gleich 4 ist, ist $\left| \hat{\mathcal{E}}_x \text{ MAX} / \hat{\mathcal{E}}_y \text{ MAX} \right|$ von der Größenordnung 100.



8a: Tiefster Eigenwert als Funktion der Wellenzahl k



8b: Aufteilung der Grundswingungsenergie als Funktion von k
 — Gravitationsanteil; ---- elektromagnetischer Anteil; -.-.- Kompressionsanteil.

Abb. 8: Kippenhahn-Schlüter-Modell: $Y = Z = 10$, $r = 10$.

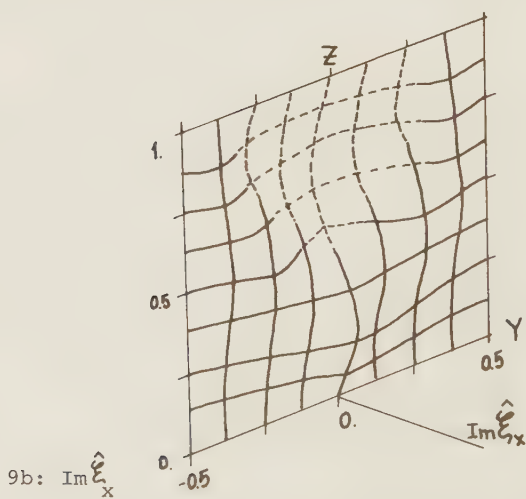
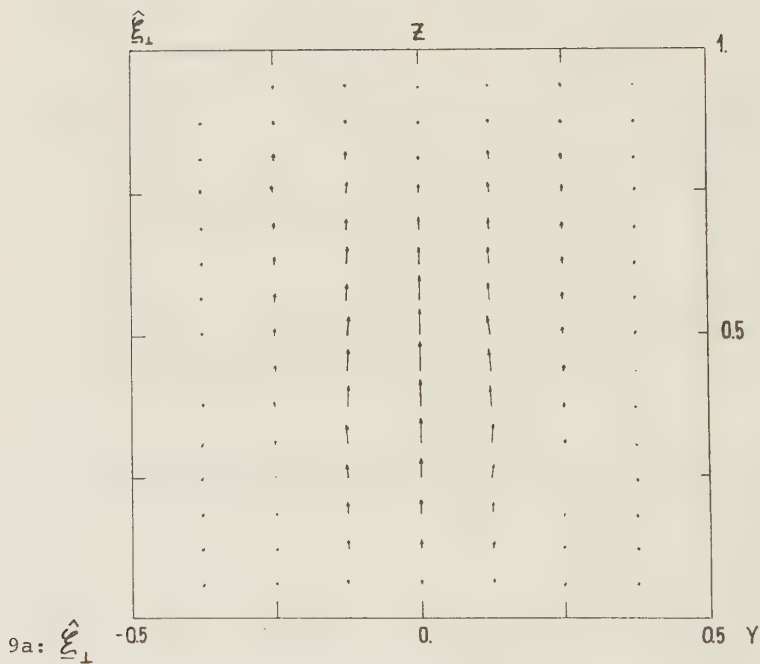


Abb. 9: Kippenhahn-Schlüter-Modell: Grundmode, $k = 1$; $r = 10$;
 $Y = Z = 1$; $\omega_{\min}^2 = 4,413$.

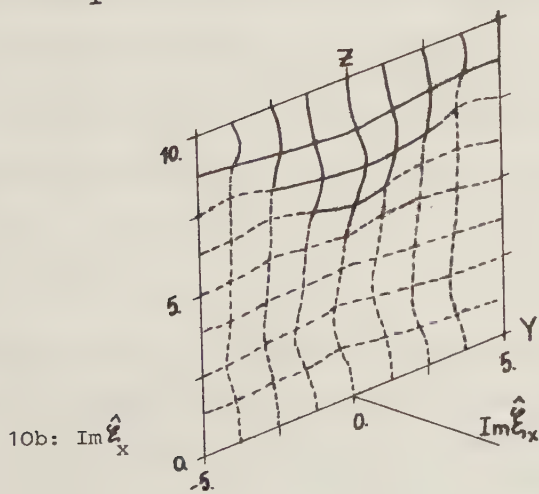
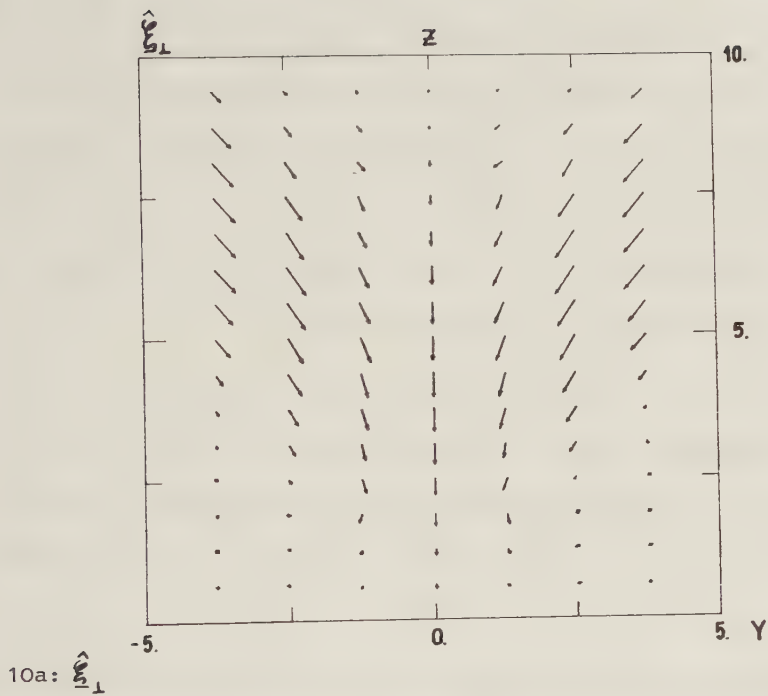


Abb. 10: Kippenhahn-Schlüter-Modell: Grundmode; $k = 10$, $r = 1$,
 $Y = Z = 10$, $\omega_{\min}^2 = 0,1167$.

Ein letztes Beispiel der Grundschwingungsmoden in diesem Parameterbereich wird in der Abb. 10 gezeigt. Der r -Wert entspricht diesmal einem Neigungswinkel von 45° . Die Flüssigkeitselemente schwingen in der (y,z) -Ebene entlang der Feldlinien; jedoch bei $y = 0$ schwingen sie senkrecht dazu. Ferner bilden sich in der untersten Region zwei wirbelartige Strukturen; Im $\hat{\xi}_x$ zeigt einen symmetrischen Verlauf und erreicht bei $(0, 0,25)$ das Maximum. Im Gegensatz zu dem vorigen Fall sind die Verhältnisse $\left| \hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX} \right|$, $\left| \hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX} \right|$ etwa gleich und von der Größenordnung 0,05.

Als letzten Punkt wollen wir noch den Fall zweidimensionaler Schwingungsmoden, d.h. $k = 0$, betrachten. Wie im Anhang C erläutert ist, gibt es in diesem Fall nur zwei Möglichkeiten für die allgemeinste Mode: i) $\hat{\xi}_x \equiv 0$, $\hat{\xi}_1 \neq 0$ und ii) $\hat{\xi}_x \neq 0$, $\hat{\xi}_1 \equiv 0$. Man hat zweidimensionale Schwingungen, die entweder nur in der (y,z) -Ebene oder entlang der Protuberanzachse stattfinden. Welche von den Moden die niedrigste Energie besitzt, wird von den jeweiligen Gleichgewichtsparametern entschieden. Im vorliegenden Fall des Kippenhahn-Schlüter-Gleichgewichts bestimmt der Parameter r das Auftreten von i) bzw. ii). Wir haben ferner gefunden, daß für $r \lesssim 1$ die Situation i) und für $r > 1$ die Situation ii) vorliegt.

2.2 Modell von Dungey

Im Absatz 1.3 war es uns gelungen, Stabilität dieses Gleichgewichts gegen spezielle Verschiebungen zu beweisen. Jetzt werden wir mittels unseres numerischen Verfahrens die Stabilitätseigenschaften im Fall allgemeiner Verschiebungen untersuchen. Wir benutzen neben (III.17) noch die folgenden normierten Größen:

$$x = \frac{\tilde{x}}{2h_0}; \quad \xi = \frac{\tilde{\xi}}{2h_0}; \quad k = 2h_0 \tilde{k}; \quad \delta W = \frac{4\pi \delta \tilde{W}}{2h_0 A_0^2}; \quad \omega^2 = \frac{2h_0 \tilde{\omega}^2}{g} \quad (\text{IV.38})$$

Dabei ist h_0 die barometrische Skalenhöhe. In diesem Modell steht die Dicke der Protuberanz fest, nämlich $Y = 2\pi$; berücksichtigt man zusätzlich eine zweite Periode des Gleichgewichts, so ist die Dicke der Doppelprotuberanz $Y = 4\pi$. Die Konstante C in (III.16) muß groß genug ausgewählt werden, damit der Druck nirgendwo negativ wird.

Wir haben $C = \alpha \underset{(Y,Z)}{\text{Max}} A(y,z) = \alpha (1 + 2e^{z_0} + e^{2z_0})$ angenommen, wobei die Konstante $\alpha \geq 1$ ist. Dadurch erhalten wir immer einen positiven Druck innerhalb des Plasmagebietes. Ein weiterer freier Parameter ist die Position des Neutralpunktes z_0 (s. Abb. 3). Durch das Variieren von z_0 bekommen wir unterschiedliche Feldkonfigurationen, z.B. mit $z_0 = -3$ erhält man bogenartige, aber mit $z_0 = 10$ fast horizontale Feldlinien. Andere Parameter sind die Wellenzahl k und die Protuberanzhöhe Z .

2.2.1 Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen

Wir untersuchen an dieser Stelle das Stabilitätsverhalten des Dungey-Gleichgewichtes in dem für ruhende Protuberanzen relevanten Parameterbereich. Anschließend werden wir unsere Resultate mit den Beobachtungen vergleichen. Wir betrachten eine typische Protuberanz der Höhe $Z = 35,5 - 118,5$ (d.h. $\tilde{Z} = 1,5 - 5 \cdot 10^4$ km), Dicke $Y = 2\pi$ (d.h. $\tilde{Y} = 2,65 \cdot 10^3$ km) und setzen $\alpha = 1$ (Zustand mit minimalem Druck) sowie $z_0 = 2$ (s. Abb. 3) voraus. Aus der Beobachtung periodischer Strukturen in ruhenden Protuberanzen (Nakagawa und McKim Malville, 1969) bekommen wir das Intervall $0,032 \leq k \leq 0,131$. Für die oben erwähnten Parameter erhalten wir ausschließlich Stabilität. Die Tabelle 3 stellt $\omega_{\min}^2$, die Grundfrequenz $\nu_{\min} = \sqrt{g/2h_0} \omega_{\min}/2\pi$ sowie die Perioden der stabilen Schwingungen zusammen. Die Perioden

Tabelle 3: Dungey-Modell: $\omega_{\min}^2$, Grundfrequenz $\nu_{\min}$ sowie Periode
beim beobachteten Parameterbereich (M = 32)

k	Y	Z	α	z_o	$\omega_{\min}^2 (10^{-3})$	$\nu_{\min} (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	P (Min.)
0,03	27	35,54	1	2	4,672	2,772	60,12
0,08	27	35,54	1	2	5,170	2,916	57,15
0,13	27	35,54	1	2	5,603	3,035	54,90
0,03	27	118,5	1	2	2,652	2,088	79,80
0,08	27	118,5	1	2	2,788	2,141	77,83
0,13	27	118,5	1	2	3,015	2,226	74,84

nehmen mit wachsendem k ab.

Wir betrachten jetzt die zugehörigen Grundmoden. Sie haben die Form $\xi = (\hat{\xi}_x e_x + \hat{\xi}_1) e^{ikx}$, wobei $\hat{\xi}_x$ rein imaginär und $\hat{\xi}_1$ rein reell angenommen werden können (s. Anhang C). Die in der Abb. 11 gezeigte Verschiebung $\hat{\xi}$ ist charakteristisch für alle anderen betrachteten Fälle. Auffallend ist hier, daß die Amplitude der Verschiebung $\hat{\xi}$ viel größer in der oberen Region als in der unteren Region ist. In der (y,z)-Ebene bewegen sich die Flüssigkeitselemente vorwiegend in horizontaler Richtung (Abb. 11a), wobei die Amplitude von $\hat{\xi}_1$ um $y = 0$ maximal wird. Andererseits ist die Amplitude der Komponente $\hat{\xi}_x$ teilweise größer als die der anderen Komponenten ($|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX}| = 10$, $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX}| = 30$); der um $y = 0$ antisymmetrische Imaginärteil von $\hat{\xi}_x$ erreicht seine Maxima ungefähr bei $(\pm \pi/2, 30)$. Die Protuberanz führt daher im Rahmen dieses Modells horizontale (in zur Sonnenoberfläche parallelen Ebenen) Schwingungen aus, deren Amplitude entlang der Protuberanzachse zum Teil größer als in senkrechter (y) Richtung ist. Ferner bleibt das untere Protuberanzgebiet während der Schwingungen praktisch in Ruhe.

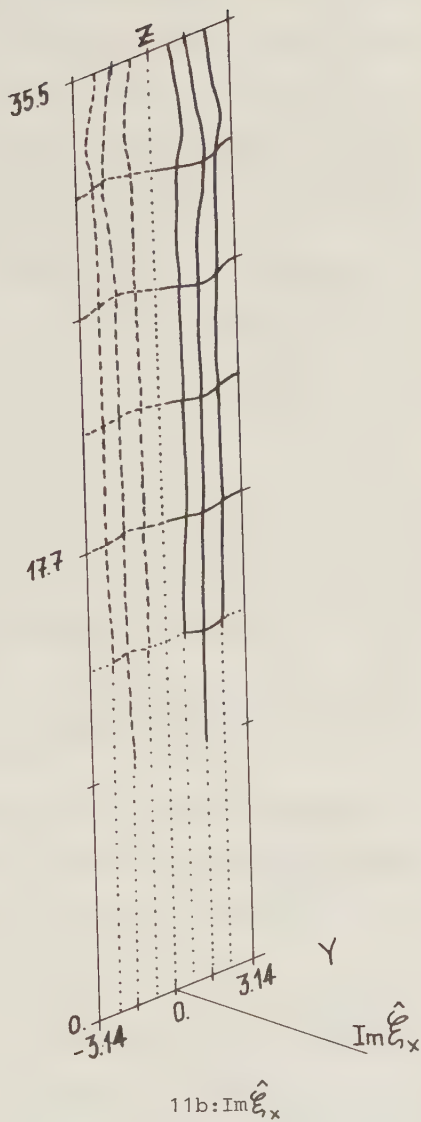
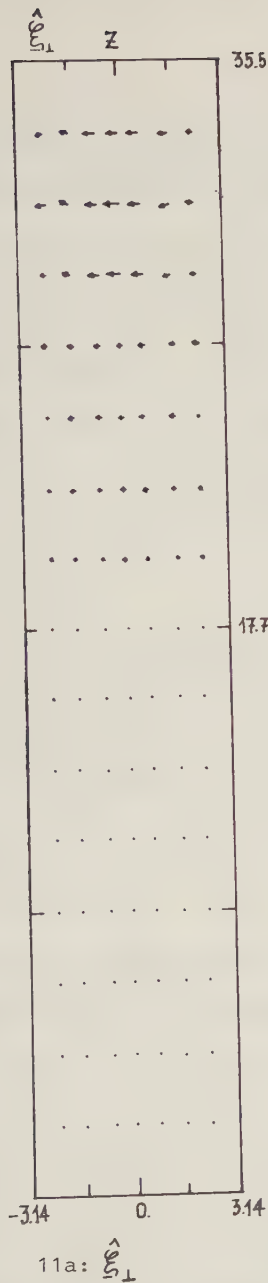


Abb. 11: Dungey-Modell: Grundmode für beobachtete Parameter

$$k = 0,08; Y = 2\pi; Z = 35,5; \alpha = 1; z_0 = 2; \omega_{\min}^2 = 0,00517$$

Die Aufteilung der Schwingungsenergie liefert das Resultat, daß für alle betrachteten Fälle die Lorentzkraft in hohem Maße die Schwingungen bestimmt. Die Kompressions- und die Gravitationsbeiträge zur gesamten Schwingungsenergie sind unwesentlich. Obwohl eine solche Struktur der Protuberanzschwingungen bis jetzt im Detail noch nicht beobachtet worden ist, kann das Dungey-Modell relativ gut die leichter zu beobachtenden horizontalen Schwingungen in Einzelprotuberanzen beschreiben (s. z.B. Kleczek und Kuperus, 1969). Die von uns erhaltenen Perioden liegen im wesentlich innerhalb der gemessenen Periodenintervalle: 6 - 40 Min (Ramsey und Smith, 1969), 76 - 82 Min (Bashkirtsev et al., 1982).

Beobachtungen von Schwingungen in Doppelprotuberanzen liegen bisher noch nicht vor. Nach unseren Resultaten sollen sie langsamer als die Einzelprotuberanzen schwingen, weil die Vergrößerung der Dicke (auf $Y = 4\pi$) eine Senkung von $\omega_{\min}^2$ zur Folge hat.

2.2.2 Andere Parameterbereiche

Zur Bestimmung weiterer Eigenschaften des Dungey-Modells wollen wir ergänzend andere Parameterbereiche außerhalb des beobachteten Bereichs betrachten.

Die Tabelle 4 zeigt exemplarisch den tiefsten Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für verschiedene Parameter und Diskretisierungsnetze. Aus dieser Tabelle kann man das typische Verhalten von $\omega_{\min}^2$ in Abhängigkeit von den Parametern entnehmen. Wir finden Instabilität für große k-Werte. Die Senkung ($z_0 < 1$) des Neutralpunktes sowie die Erhöhung des Druckparameters α wirken stabilisierend. Die Vergrößerung der Wandabstände muß zu einer Absenkung von $\omega_{\min}^2$ führen. Wir erhalten in

Tabelle 4: Dungey-Modell: Tiefster Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für verschiedene Netze mit M-Elementen

k	Y	Z	α	z_0	$\omega_{\min}^2$ M = 2	$\omega_{\min}^2$ M = 4	$\omega_{\min}^2$ M = 8	$\omega_{\min}^2$ M = 16	$\omega_{\min}^2$ M = 32
10	2π	1	2	1	0,4412	0,1304	0,0955	0,0463	0,0294
10	2π	10	2	1	0,6881	0,0693	0,0421	0,0019	-0,0001
10	2π	10	1	1	0,6253	0,0871	0,0511	0,0006	-0,0059
0	2π	10	1	1	0,2645	0,0488	0,0224	0,0198	0,0097
1	2π	10	1	1	0,6253	0,1421	0,1033	0,0243	0,0177
1	2π	10	3	1	0,7031	0,0800	0,0552	0,0127	0,0088
1	2π	10	1	-1	1,2883	0,6637	0,5192	0,4242	0,3312
1	2π	10	1	0	0,7671	0,2891	0,2161	0,1356	0,1109
1	2π	10	1	2	0,6141	0,0923	0,0689	0,0121	0,0061
1	4π	20	2	1	0,3343	0,0492	0,0308	0,0213	0,0174
0	4π	20	2	1	0,0610	0,0167	0,0160	0,0156	0,0093
1	4π	20	2	-1	0,5306	0,2022	0,1621	0,1557	0,1332
1	4π	10	10	1	0,1878	0,0149	0,0105	0,0047	0,0029
1	4π	10	5	1	0,1889	0,0184	0,0138	0,0092	0,0057

der Tat diese Tendenz, wenn wir die Protuberanzhöhe Z vergrößern. Die Abb. 12 zeigt diesen Wandeffekt im Fall einer Einzelprotuberanz. Wir erhalten einen ähnlichen Verlauf für die Doppelprotuberanz. Der Übergang von einer Einzel- zu einer Doppelprotuberanz bedeutet in erster Linie eine Komplexitätszunahme der Feldlinienkonfiguration, die eine erhöhte Auflösung erfordert. Wir können jedoch aus Gründen der Rechenzeit einen solchen Übergang im Fall der von uns erreichbaren maximalen Genauigkeit (32 Elemente) nur mit gleichbleibendem Diskretisierungsnetz machen. Das hat zur Folge, daß die Verkleinerung von $\omega_{\min}^2$ bei der Doppelprotuberanz nicht immer stattfindet. Dieses Verhalten wird besonders vom Parameter z_0 bestimmt.

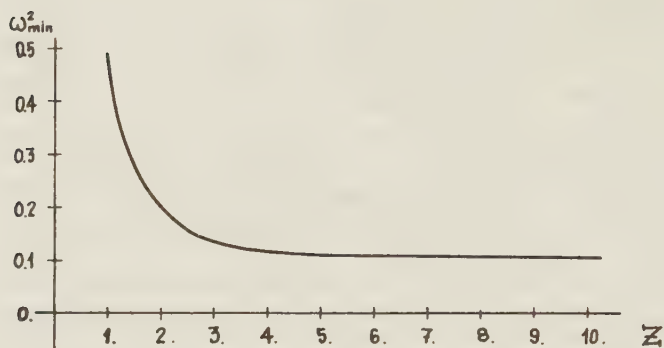
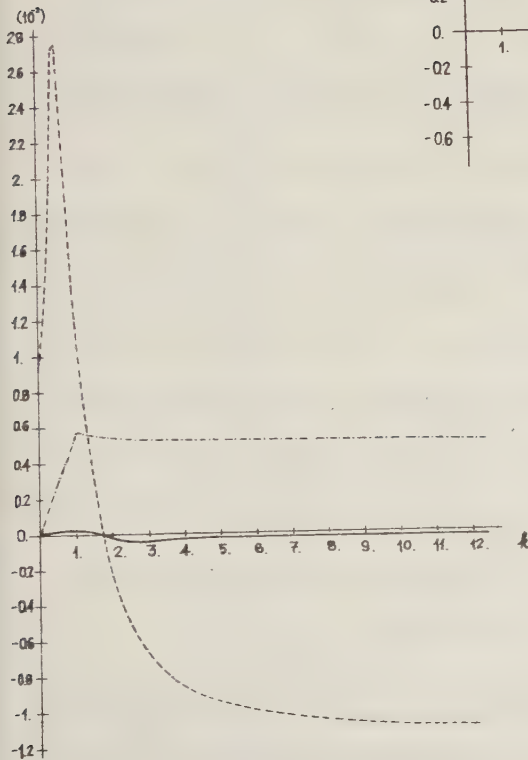
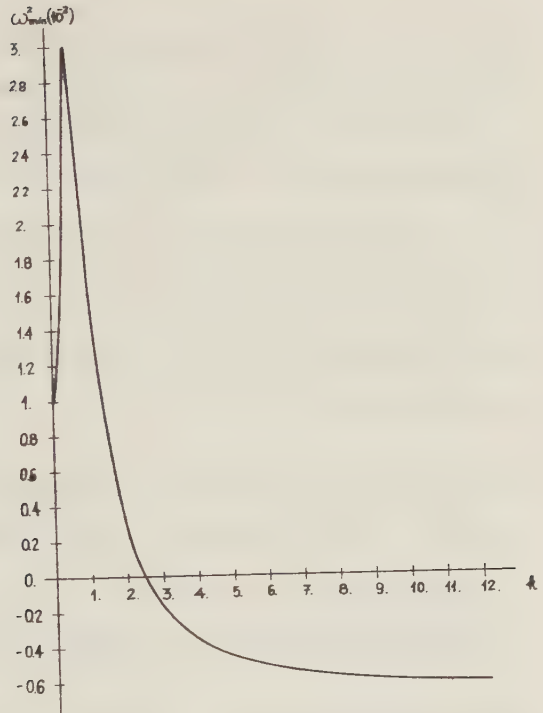


Abb. 12: Dungey-Modell: Tiefster Eigenwert als Funktion der Höhe Z des Plasmagebietes; $k = 1$; $Y = 2\pi$; $\alpha = 1$; $z_0 = 0$.

Zur Beschreibung des charakteristischen Stabilitätsverhaltens wollen wir uns auf die Parameterbereiche konzentrieren, wo Instabilität auftritt. Eigenschaften weit außerhalb solcher Bereiche werden wir nur kurz beschreiben.

Die Abb. 13a stellt den Verlauf von $\omega_{\min}^2$ als Funktion der Wellenzahl k im Fall einer Protuberanz im niedrigsten Druckzustand dar. Wir stellen fest, daß das Dungey-Gleichgewicht für diese Parameter gegen Moden mit relativ kleinen Wellenlängen instabil ist. Das ausgeprägte Maximum für $k \lesssim 1$ ist eine gemeinsame Eigenschaft aller von uns betrachteten Fälle, auch der Doppelprotuberanzen. Während in der Abb. 13a $\omega_{\min}^2$ für $k \gtrsim 1$ rasch zu negativen Werten kommt, bleibt $\omega_{\min}^2$ bei der Absenkung der Lage des Neutralpunktes oder Erhöhung des Druckparameters über den gesamten k -Bereich beinahe konstant. Andererseits ist die k -Abhängigkeit von $\omega_{\min}^2$ im instabilen Bereich ebenfalls schwach. Die Abb. 13b zeigt die Energieaufteilung

13a: Tiefster Eigenwert
als Funktion der
Wellenzahl k



13b: Aufteilung der Grund-
energie als Funktion
der Wellenzahl k ;

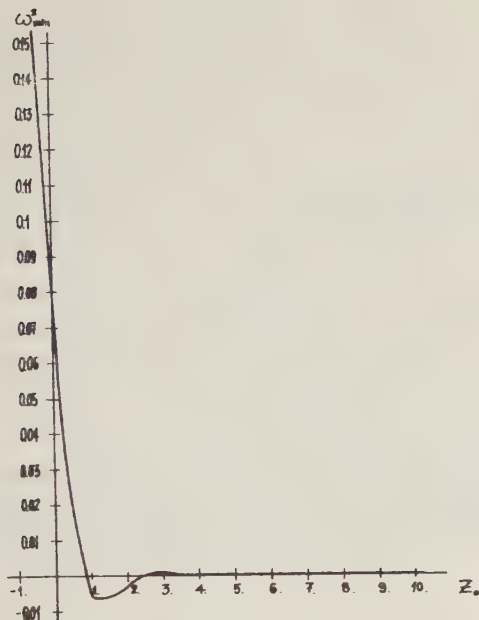
- Gravitations-
anteil;
- elektromagne-
tischer Anteil;
- · - · - Kompressions-
anteil.

Abb. 13: Dungey-Modell; $Y = 2\eta$; $Z = 10$; $\alpha = 1$; $z_0 = 1$.

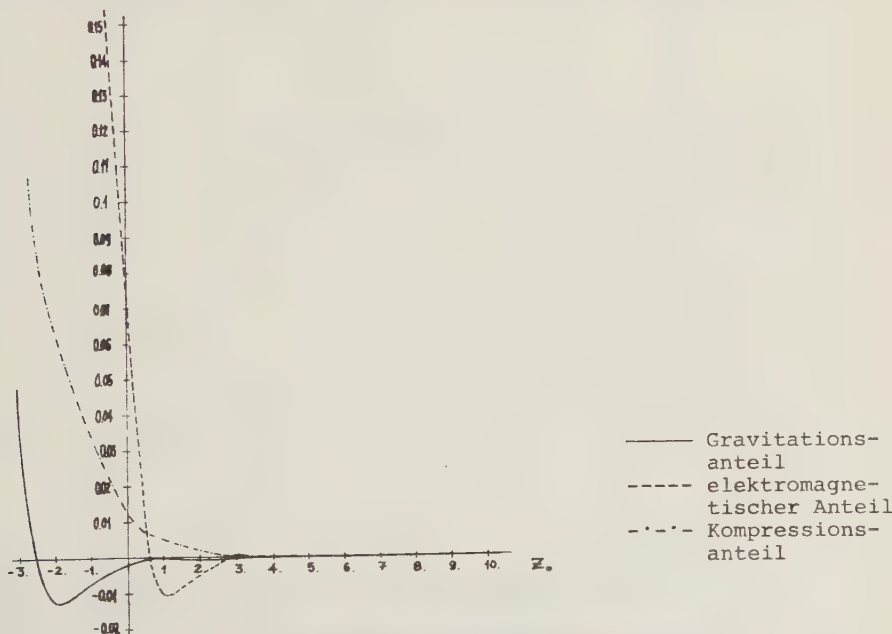
für diese Situation. Elektromagnetische Effekte treiben weitgehend die aufgetretene Instabilität. Gravitationseffekte wirken vorwiegend nur schwach destabilisierend. Dagegen wirken die Kompressionseffekte stets stabilisierend. Das gilt gleichfalls für alle anderen von uns betrachteten instabilen Parametersätze. Im stabilen Bereich der in der Abb. 13a gezeigten Situation werden die stabilen Schwingungen zum großen Teil durch die elektromagnetische Kraft bestimmt. Das ist die Regel besonders bei stabilen Doppelprotuberanzen.

Wenn wir jetzt einen k -Wert im instabilen Bereich, z.B. $k = 10$ sowie α , Y und Z festhalten und z_0 variieren lassen, erhalten wir den in der Abb. 14a gezeigten Verlauf von $\omega_{\min}^2$. Die Senkung des Neutralpunktes in photosphärische ($z_0 \leq 0$) Schichten stabilisiert in starkem Maße das Gleichgewicht, wobei die elektromagnetische Kraft den Hauptbeitrag zu dieser Stabilisierung leistet (s. Abb. 14b). Die untere Grenze des relativ engen instabilen z_0 -Bereiches scheint mit dem Auftauchen der Trennlinie zwischen offenen und geschlossenen Feldlinien $A(y, z) = 1$ am unteren Rand des betrachteten Plasmagebietes korreliert zu sein (s. Abb. 3). Weit vom instabilen Bereich, d.h. für genügend kleine k - oder größere α -Werte, erhalten wir für beide Protuberanzklassen einen monoton abnehmenden Verlauf von $\omega_{\min}^2$ mit wachsendem z_0 . Im Rahmen dieses Modells schwingen Protuberanzen, die bogenartige Feldlinien besitzen, viel schneller als Protuberanzen, welche geschlossene oder sogar vorwiegend horizontale Feldlinien aufweisen.

Wenn wir in der vorigen Situation die Lage des Neutralpunktes bei $z_0 = 1$ sowie k , Y und Z festhalten und den Druckparameter α erhöhen, erhalten wir den in der Abb. 15a gezeigten Verlauf von $\omega_{\min}^2$.

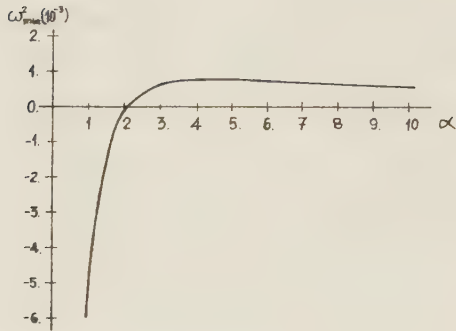


14a: Tiefster Eigenwert als Funktion der Neutralpunkt-Lage z_0 .

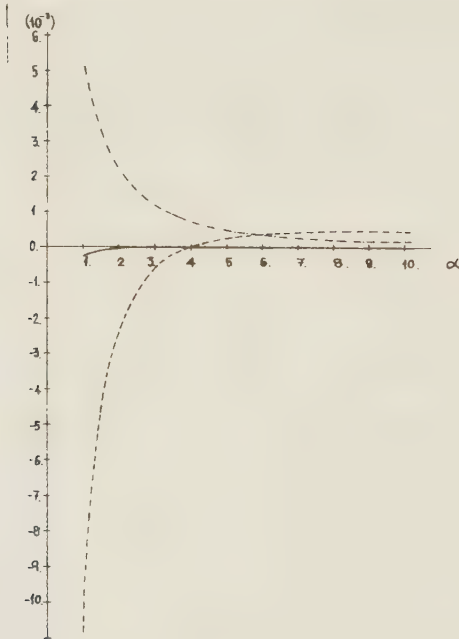


14b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion der Neutralpunkt-Lage z_0 .

Abb. 14: Dungey-Modell: $Y = 2\tilde{\gamma}$; $Z = 10$; $\alpha = 1$; $k = 10$.



15a: Tiefster Eigenwert als Funktion des Druckparameters α



15b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion des Druckparameters

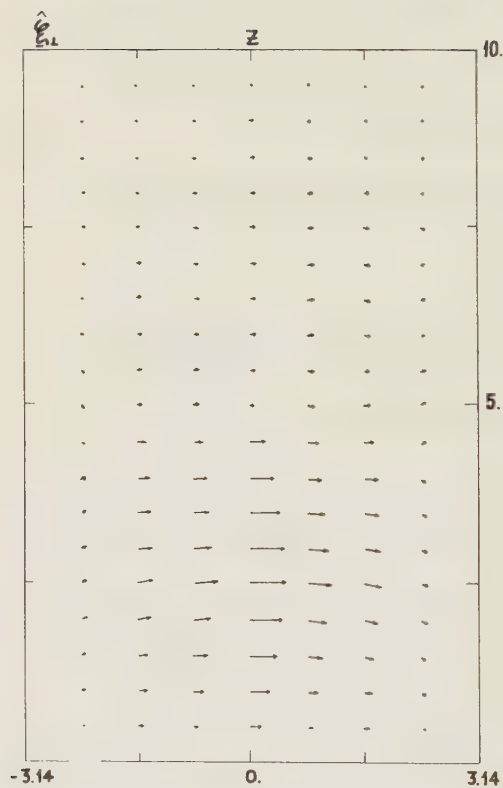
—— Gravitationsanteil; ---- elektromagnetischer Anteil;
 -.-.- Kompressionsanteil.

Abb. 15: Dungey-Modell: $Y = 2\pi$, $Z = 10$, $k = 10$, $\alpha = 1$.

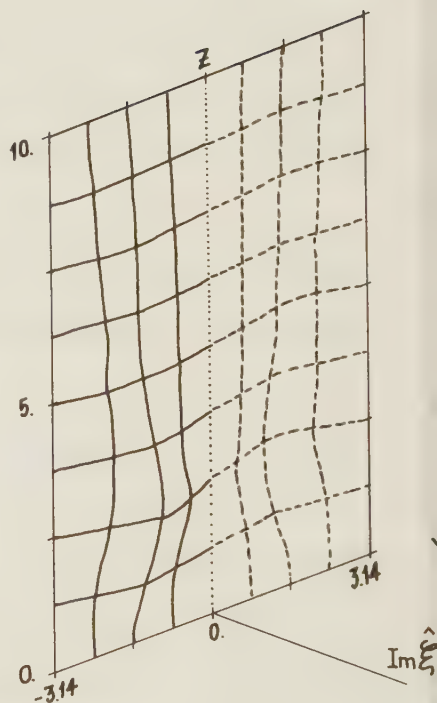
Die Instabilität beim niedrigsten Druckzustand wird rasch durch die Verdopplung von α unwirksam gemacht. Die in der Abb. 15b dargestellte Energieaufteilung zeigt, daß bei der Erhöhung des Druckes die destabilisierenden elektromagnetischen Effekte schwächer werden; die Kompressionseffekte können diese dann neutralisieren. Die stabilen Schwingungen des Gleichgewichts bei starkem Druck werden im wesentlichen gleichmäßig durch elektromagnetische und Kompressionskräfte bestimmt. Weit vom instabilen Bereich, z.B. wenn z_0 bzw. k verkleinert wird, erhalten wir, daß $\omega_{\min}^2$ sich mit wachsendem α monoton sinkend verhält. Dabei ist die elektromagnetische Kraft fast ausschließlich für die Schwingungen entscheidend. Das gilt für beide hier behandelten Protuberanzklassen.

Wir werden jetzt exemplarisch einzelne charakteristische Eigenmoden für die verschiedenen Situationen vorstellen sowie die dabei beteiligten physikalischen Mechanismen diskutieren.

Die Abb. 16 zeigt $\hat{\xi}$ für eine Situation, bei der das Gleichgewicht gegen kurzwellige Verschiebungen instabil ist. Typisch für instabile Situationen ist, daß die Amplitude der Verschiebung in der unteren Region größer ist als in der oberen Region. Die Komponente $\hat{\xi}_x$ ist meistens horizontal, wobei ihre maximale Amplitude bei (0, 2,5) erreicht wird. Andererseits ist die Amplitude von $\hat{\xi}_x$ kleiner als die der Komponente $\hat{\xi}_z$ $\left| \hat{\xi}_x / \hat{\xi}_z \right|_{\text{MAX}} = 0,05$; $\left| \hat{\xi}_x / \hat{\xi}_z \right|_{\text{MAX}} = 0,6$; $\hat{\xi}_z$ wird bei $(\pm \pi/2, 2,5)$ erreicht. Nach Abb. 13b handelt es sich hier im wesentlichen um eine Instabilität elektromagnetischer Natur. Wenn wir die Beiträge der einzelnen Energieanteile in den Diskretisierungselementen betrachten, stellen wir fest, daß die Instabilität in der untersten Region entsteht. Die Abb. 17 zeigt diese Instabilitätsregion. Die schattierten Elemente sind die ein-



16a: $\hat{\xi}_\perp$



16b: $\text{Im} \hat{\xi}_x$

Abb. 16: Dungey-Modell: Grundmode; $Y = 2\pi$; $Z = 10$; $k = 10$; $\alpha = 1$;
 $z_0 = 1$; $\omega_{\min}^2 = -0,0059$.

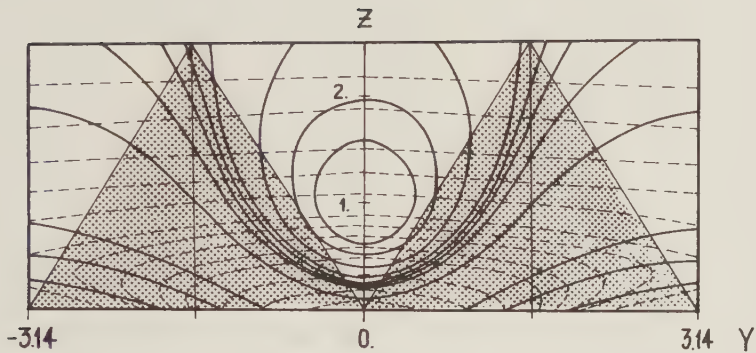


Abb. 17: Dungey-Modell: Instabilitätsregion; $Y = 2\pi$; $Z = 10$, $k = 10$;
 $\alpha = 1$; $z_0 = 1$.

zigen Regionen, wo δM negativ wird. Der sehr kleine Beitrag der Gravitationseffekte zur Instabilität entsteht auch in diesen Elementen und zusätzlich noch in den beiden Zentralelementen. Die gestrichelten Linien bezeichnen Isochoren.

Die weitgehend horizontale Bewegung der Flüssigkeitselemente bei dieser Situation erinnert, besonders in der Region mit geschlossenen Feldlinien, an die $m = 1$ kink-Instabilität eines z-Pinches.

Die Anwachsrate dieser Instabilität ist von der Größenordnung

$\Gamma_{m=1} \sim v_A / \tilde{a}$ für den Fall eines z-Pinches mit gleichförmig verteilter Stromdichte, keiner Wand und Inkompressibilität (Tayler, 1957a), wobei v_A die typische Alfvén-Geschwindigkeit und $\tilde{a}$ der Pinchradius ist. Wenn wir $\tilde{a} = 2ho$ ($\pi/2$) und $v_A = 4,88 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$ ($B = 5G$, $\rho = 8,35 \cdot 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$) annehmen, erhalten wir $\Gamma_{m=1} = 7,36 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.

Andererseits haben wir für den hier betrachteten Fall die Anwachs-

rate $\Gamma_D = \sqrt{g/2ho} \omega_{\min} / 2\pi = 3,11 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (für $T = 7 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$) erhalten. Der kleinere Wert von Γ_D hängt möglicherweise mit einem stark stabilisierenden Einfluß der Umgebung zusammen. Mehrere Autoren (Tayler, 1957b: gleichförmig verteilter Strom; Shafranov, 1959: Oberflächenstrom) haben gefunden, daß der z-Pinch durch eine ideal leitende Wand stabilisiert werden kann. Je kleiner das Verhältnis $\tilde{R}/\tilde{a}$ ($\tilde{R}$, Wandradius) ist, desto größere Wellenlängen werden stabilisiert; in unserem Fall haben wir $\tilde{R}/\tilde{a} \approx 2$, was nach Shafranov Instabilität erst für $k \geq 0,6$ bedeutet. Wir erhalten nach der Abb. 13a Instabilität ab $k \geq 2,5$. Wegen der Verschiedenheit der Konfigurationen kann man natürlich nur grobe Übereinstimmung erwarten. Ferner ist der Verlauf von $\omega_{\min}^2$ für große k-Werte konsistent mit dem Resultat, daß die Anwachsrate des z-Pinches mit gleichförmig verteiltem Strom für $k \gg 1$ zu einem asymptotisch konstanten Wert kommt (Tayler, 1957a). Die Berücksichtigung der Kompressibilität führt zu einer Vergrößerung der maximalen Anwachsrate. Andererseits ist die Wirkung der Kompressionseffekte relativ klein gegenüber den elektromagnetischen Effekten. Der Grund der Abweichung zwischen unserem System und den oben erwähnten Pinchkonfigurationen liegt offensichtlich in der Abwesenheit des Gravitationsfeldes, das in unserem Fall die nicht zentrierte Massendichteverteilung verursacht. Die aufgetretene Instabilität kann man daher als eine Art durch Gravitationseffekte verzerrte kink-Instabilität bezeichnen.

Das Resultat, nach dem die kink-Instabilität für $k \gg 1$ in eine Austauschinstabilität übergeht (s.z.B. bei inkompressiblem Plasma, Shafranov, 1957), erklärt die Erfüllung der lokalen Instabilitätsbedingung $\underline{b}_{\text{eff}} \cdot \nabla \zeta < 0$ (Mikhailovskii, 1974) in verschiedenen Regionen der Dungey-Konfiguration (s. Abb. 17). Jedoch folgt die Bewegung

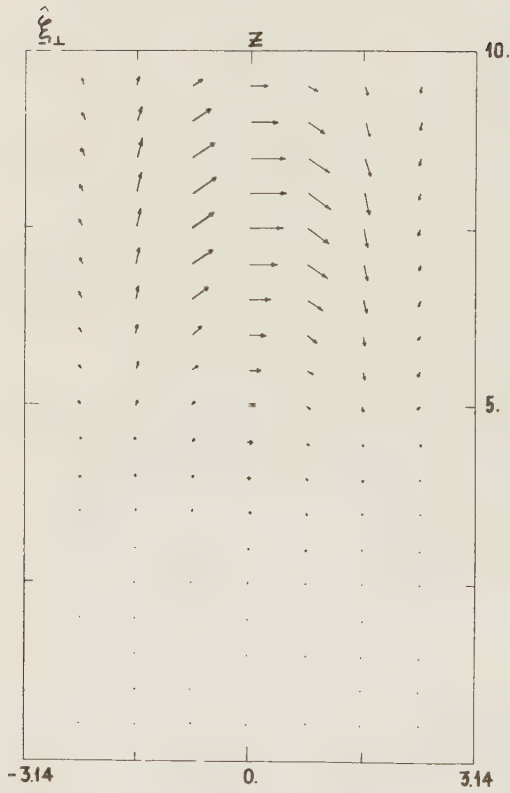
der Flüssigkeitselemente nicht in der erwarteten Richtung (d.h. in Richtung des lokalen Krümmungsradius). Diese Diskussion weist offensichtlich auf die Schwierigkeit hin, eine genaue Identifizierung der Instabilität durch Analogien mit nur teilweise ähnlichen Konfigurationen zu erzielen.

Wenn wir von der in der Abb. 16 beschriebenen Situation aus den Neutralpunkt bis zu $z_0 = -3$ senken, wird die Protuberanz stabilisiert. Die Abb. 18 zeigt die Eigenmode $\hat{\xi}$ für diese stabile Situation. Für die meisten stabilen Fälle ist die Amplitude der Schwingungen in der oberen Region viel größer als in der unteren. Andererseits, wenn die Protuberanz nur bogenartige Feldlinien besitzt (d.h. $z_0 \leq 0$), schwingen die Flüssigkeitselemente vorwiegend entlang der Feldlinien. Die Abb. 18a zeigt eine solche Situation. Die oben erwähnten Eigenschaften gelten sowohl für Einzel- als auch für Doppelprotuberanzen. Die Trennungslinie ($y = 0$) in der Doppelprotuberanz mit eher horizontalen Feldlinien schwingt jedoch in vertikaler Richtung.

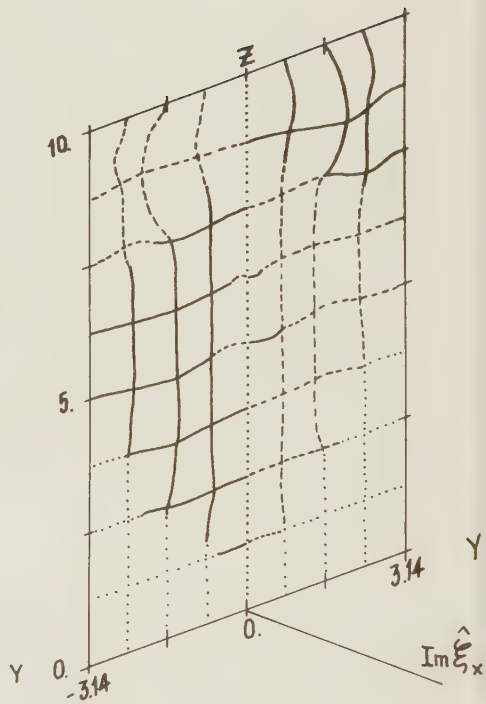
Die Abb. 18b zeigt die Komponente $\text{Im} \hat{\xi}_x$, die bei ungefähr $(\pm \pi/2, 8,8)$ ihr Maximum erreicht. Die Amplitude von $\hat{\xi}_x$ ist viel kleiner als die der Komponente $\hat{\xi}_1$ ($|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX}|$ und $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX}|$ sind etwa gleich und von der Größenordnung 0,02).

Bei stabilen Situationen mit geschlossenen Feldlinien (d.h. $z_0 > 0$) schwingen die Flüssigkeitselemente vorwiegend in horizontaler Richtung (auch die Trennungslinie bei Doppelprotuberanzen).

Wie wir oben bereits erwähnt haben, bereitet die Erweiterung von Y zur Beschreibung einer Doppelprotuberanz manchmal Konvergenzschwierigkeiten im numerischen Verfahren. Wir können deshalb im Fall einer



18a: $\hat{\xi}_\perp$



18b: $\text{Im } \hat{\xi}_x$

Abb. 18: Dungey-Modell: Grundmode; $Y = 2\pi$; $Z = 10$; $k = 10$; $\alpha = 1$;

$z_0 = -3$; $\omega_{\min}^2 = 0,940$.

Doppelprotuberanz nur eine beschränkte Aussage erzielen. In erster Linie wissen wir mit Sicherheit, daß die für die Einzelprotuberanz gefundene Instabilität in demselben Parameterbereich bei der Doppelprotuberanz mit gleicher oder größerer Höhe ebenfalls vorhanden ist.

Zum Schluß wollen wir noch kurz auf den Fall zweidimensionaler Verschiebungen, d.h. $k = 0$, eingehen. Wegen $B_x = 0$ erhält man jetzt, wie beim vorigen Modell, die möglichen Verschiebungen i) ($\hat{\xi}_x \equiv 0$, $\hat{\xi}_1 \neq 0$) und ii) ($\hat{\xi}_x \neq 0$, $\hat{\xi}_1 \equiv 0$). In diesem Modell wird durch den Neutralpunkt-Parameter z_0 entschieden, welche dieser beiden möglichen Moden jeweils die niedrigste Energie besitzt. Wir haben gefunden, daß solange näherungsweise $z_0 < -2$ die Verschiebung ii) die niedrigste Energie aufweist. Wird $z_0 \geq -2$, besitzt dann die Verschiebung i) die niedrigste Energie. Wir haben bei beiden Fällen stets Stabilität gefunden (vgl. Absatz 1.3).

2.3 Modell von Menzel

Nachdem wir uns im Absatz 1.3 mit speziellen Aspekten der Stabilitätsproblematik dieses Modells beschäftigt haben, werden wir jetzt mit Hilfe unseres numerischen Verfahrens eine weitgehende Antwort auf die Stabilitätsfrage geben. Zur Anwendung des Verfahrens definieren wir noch, neben den in (III.6) und (IV.27) gegebenen Größen, die folgenden normierten Größen:

$$\chi = \frac{\tilde{\chi}}{2h} ; k = 2h\tilde{k} ; \omega^2 = \frac{2h\tilde{\omega}^2}{g} \quad (\text{IV.39})$$

Wobei $h = h_0(q + 1)$, h_0 die barometrische Skalenhöhe in Abwesenheit eines Magnetfeldes und q eine positive Konstante ist. Alle Gleichgewichtsgrößen werden durch zwei Parameter, r und q , eindeutig festgelegt. Diese Parameter sind jedoch durch die Bedingung $qr > 1$ verknüpft, damit eine geeignete (maximale Massendichte, wo die Feldlinien nach unten gekrümmt sind) Beschreibung der Protuberanz möglich ist. Aufgrund der Periodizität des Gleichgewichts in y -Richtung wird die Breite des Protuberanzgebietes Y durch r und q bestimmt; um Y zu erhalten, braucht man lediglich das Maximum der Funktion f mittels (III.14) zu berechnen. Für eine Doppelprotuberanz wird daher eine Breite berücksichtigt, die zwei Perioden des Gleichgewichts umfaßt. Der Parameter r als das maximale Verhältnis von Plasmadruck zu magnetischem Druck ist eine positive Zahl. Zusätzliche freie Parameter sind die Höhe Z des Protuberanzgebietes und die Wellenzahl entlang der Protuberanzachse. Wir haben für $q = 1$ die analytische Lösung f , (III.10), benutzt; für $q \neq 1$ haben wir dagegen die Gleichung (III.4) numerisch gelöst. Den tiefsten Eigenwert $\omega_{\min}^2$ im Fall der numerischen Lösung bei $q = 1$ haben wir mit dem der analytischen Lösung verglichen; die beiden Werte haben gut (typischerweise bis auf 0,1%) übereingestimmt.

2.3.1 Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen

Zum späteren Vergleich mit den Beobachtungen werden wir zuerst die Stabilitätseigenschaften dieses Modells in dem bei Protuberanzen realisierten Parameterbereich berücksichtigen. Wir können die Größenordnung des Parameters r für typische Protuberanzen abschätzen. Wenn wir die Temperatur mit $7 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$, die Elektronendichte mit $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ und die Magnetfeldstärke zu 5 G annehmen, erhalten wir $r = 0,0505$. Damit soll der Parameter $q > 18,9$ sein. Wir haben daher $q = 20$, d.h. $qr = 1,01$, vorausgesetzt, was dem beobachteten relativ flachen Verlauf der Feldlinien entspricht. Mit der Skalenhöhe $h_0 = 211 \text{ km}$ bekommen wir $h = (q + 1)h_0 = 4431 \text{ km}$. Die Breite Y beträgt 0,97, d.h. $\tilde{Y} = 2hY = 8627 \text{ km}$, die größer als bei durchschnittlichen Einzelprotuberanzen ist. Für die Höhe Z haben wir 1,7 - 5,64 angenommen, was $\tilde{Z} = (1,5 - 5) \cdot 10^4 \text{ km}$ entspricht. Nach den beobachteten periodischen Strukturen in ruhenden Protuberanzen (Nakagawa und McKim Malville, 1969) erhalten wir das folgende Intervall für die Wellenzahl: $0,7 \leq k \leq 2,8$.

Für diesen Parameterbereich bekommen wir stets Stabilität. Die Tabelle 5 stellt $\omega_{\min}^2$, die Frequenz $\nu_{\min} = \sqrt{g/2h} \omega_{\min}/2\pi$ und die Periode $P = 1/\nu_{\min}$ für die betrachteten Fälle zusammen. Wir erhalten eine fast konstante Periode, die etwa 40 Min. beträgt.

Die Abb. 19 zeigt eine für alle betrachteten Fälle charakteristische Grundmode der Form $\underline{\xi} = (\hat{\xi}_x \underline{e}_x + \hat{\xi}_1) e^{ikx}$, wobei $\hat{\xi}_x$ rein imaginär und $\hat{\xi}_1$ rein reell angenommen werden kann (s. Anhang C). Wie in diesem Fall erhalten wir für sämtliche Grundmoden im Menzel'schen Modell (auch außerhalb des für Protuberanzen relevanten Parameterbereichs), daß die Amplitude der Verschiebung $\hat{\xi}_1$ erheblich größer

Tabelle 5: Menzel-Modell: $\omega_{\min}^2$, Grundfrequenz $\nu_{\min}$ sowie Periode
beim beobachteten Parameterbereich, Einzelprotuberanz
(M = 32)

k	Y	Z	r	q	$\omega_{\min}^2$	$\nu_{\min}(10^{-4} \text{ s}^{-1})$	P (Min)
0,7	0,973	1,7	0,0505	20	0,2779	4,22	39,44
1,8	0,973	1,7	0,0505	20	0,2262	4,20	39,59
2,8	0,973	1,7	0,0505	20	0,2238	4,18	39,80
0,7	0,973	5,64	0,0505	20	0,2201	5,15	40,13
1,8	0,973	5,64	0,0505	20	0,2191	4,14	40,22
2,8	0,973	5,64	0,0505	20	0,2176	4,12	40,36

in der oberen Region als in der unteren Region ist. Im vorliegenden Fall schwingen die Flüssigkeitselemente in der (y,z)-Ebene überwiegend in horizontaler Richtung. Die maximale Amplitude wird etwa bei (0, 3 Z/4) erreicht (Abb. 19a). Wegen seiner relativ kleinen Amplitude ist die Rolle der Komponente $\hat{\xi}_x$ ($|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX}| = 0,004$, $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX}| = 0,06$) praktisch unwesentlich für den Schwingungsvorgang (Abb. 19b, $\hat{\xi}_x \text{ MAX}$ bei etwa ($\pm Y/4$, 3 Z/4)). Die Protuberanz schwingt also nach dem Menzel'schen Modell in horizontaler Richtung senkrecht zur ihrer Ebene. Dabei bleibt die unterste Protuberanzregion beinahe in Ruhe.

Wenn wir die Schwingungsenergie nach ihren drei Anteilen betrachten, stellen wir fest, daß für diesen Parameterbereich die Schwingungen vorwiegend durch die Kompressionskraft bestimmt sind. Gravitationseffekte wirken hier stets destabilisierend.

Die Beobachtungen der nach großen Flares entstandenen horizontalen Schwingungen in Einzelprotuberanzen (s. z.B. Ramsey und Smith,

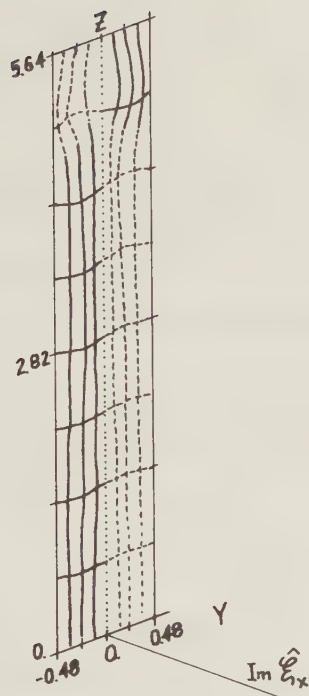
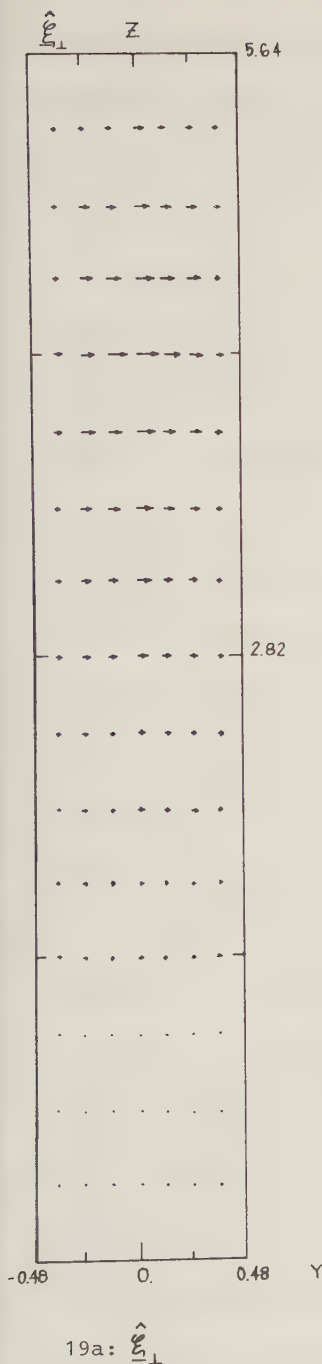


Abb. 19: Menzel-Modell: Grund-

mode für beobachtete

Parameter; $k = 2,8$;

$Y = 0,973$; $Z = 5,64$;

$r = 0,05$; $q = 20$;

$\omega_{\min}^2 = 0,2176$.

1969) weisen Perioden zwischen 6 und 40 Min auf, was sehr gut den von uns erhaltenen Perioden entspricht. Wir können daher folgern, daß das Menzel'sche Modell die Grundzüge der beobachteten horizontalen Schwingungen in einzelnen Protuberanzen gut beschreiben kann.

Wir haben ebenfalls den Fall von Doppelprotuberanzen in diesem Parameterbereich untersucht, indem wir zwei Perioden des Gleichgewichtes, d.h. $Y = 1,94$, berücksichtigt haben. Diesmal erhalten wir ausschließlich Instabilität. Die Tabelle 6 stellt $\omega_{\min}^2$, die An-

Tabelle 6: Menzel-Modell: $\omega_{\min}^2$, Anwachsrate Γ_M sowie Anwachszeit τ beim beobachteten Parameterbereich, Doppelprotuberanz ($M = 32$)

k	Y	Z	r	q	$\omega_{\min}^2$	$\Gamma_M (10^{-4} s^{-1})$	$\tau (Min)$
0,7	1,947	1,7	0,0505	20	-0,2043	4,00	41,66
1,8	1,947	1,7	0,0505	20	-0,3035	4,87	34,18
2,8	1,947	1,7	0,0505	20	-0,3812	5,46	30,50
0,7	1,947	5,64	0,0505	20	-0,5099	6,32	26,37
1,8	1,947	5,64	0,0505	20	-0,5306	6,44	25,85
2,8	1,947	5,64	0,0505	20	-0,5438	6,52	25,53

wachsrates $\Gamma_M = \sqrt{g/2h} |\omega_{\min}|/2\pi$ und die Anwachszeit $\tau = 1/\Gamma_M$ für die betrachteten Fälle dar. Wir stellen anhand der Energieaufteilung fest, daß der größte Beitrag zur freigesetzten Energie aus der Gravitationsenergie stammt. Elektromagnetische Effekte wirken auch durchgehend destabilisierend ($\delta M/\delta G = 0,2 - 0,5$). Wie bei Einzelprotuberanzen wirkt die Kompressibilität des Plasmas immer stabilisierend.

Die Beobachtungen (z.B. Kleczek, 1963) zeigen, daß bei Doppelprotuberanzen (die selten beobachtet werden) die disparition brusque ebenfalls auftreten kann, dabei steigen in typischen Fällen beide Komponenten innerhalb von 30 Min. explosionsartig auf (s. z.B. Hyder, 1967) und verschwinden. Obwohl normalerweise zwischen beiden Protuberanzen ein ständiger Strömungsaustausch stattfindet, vermutet man denselben physikalischen Mechanismus bei der disparition brusque wie im Fall einer Einzelprotuberanz. Aus diesem Grund deutet die Stabilität der Einzelprotuberanz im realisierten Parameterbereich darauf hin, daß die disparition brusque bei Doppelprotuberanzen im Menzel'schen Modell nicht enthalten ist. Die von uns erhaltene Instabilität könnte vielmehr erklären, warum Doppelprotuberanzen wesentlich seltener als Einzelprotuberanzen vorkommen. Die meisten Doppelprotuberanzen würden sich als Folge einer solchen Instabilität rasch auflösen. Andererseits könnten die wenigen vorhandenen durch nicht-lineare Effekte zu einer Stabilisierung bei endlichen Amplituden gelangen, so daß ihre Existenz erklärt werden kann (s. auch die Diskussion im nächsten Kapitel). Der Unterschied zwischen der disparition brusque und der Instabilität des Menzel'schen Modells ergibt sich auch aus den Anwachsraten und dem $\hat{E}$ -Feld. Ein direkter Vergleich der von uns gefundenen Anwachsraten mit den Beobachtungen ist offensichtlich nur möglich, wenn man das anfänglich beinahe lineare Verhalten der disparition brusque betrachtet. Dieses Verhalten liegt kurz vor dem eruptiven Anstieg der Protuberanz typischerweise innerhalb weniger Minuten (s. z.B. Waldmeier, 1938; Engvold und Rustad, 1974). Die Tabelle 6 enthält zu große Anwachszeiten, um einen solchen Anstieg zu erklären.

Aus der Berücksichtigung der Beiträge der drei Energieanteile in

den Diskretisierungselementen stellen wir fest, daß für alle betrachteten Fälle die Instabilität ausschließlich in der mittleren Region, $-Y/4 \leq y \leq Y/4$, entsteht. Andererseits haben die zugehörigen Grundmoden eher eine horizontale Polarisierung, dabei bewegen sich die Flüssigkeitselemente nur auf der Trennungslinie $y = 0$ in genau vertikaler Richtung. Diese Polarisierung entspricht nicht der der *disparition brusque*, bei der die Protuberanzen als Ganze in die Höhe steigen. Die Feldlinien auf der Trennungslinie sind nach unten geöffnet und die Isochoren nach oben (siehe Abbildung 2). Damit kann offensichtlich in der mittleren Region die lokale Bedingung für die durch Krümmungseffekte getriebene Austauschinstabilität $\underline{b}_{\text{eff}} \cdot \nabla \xi < 0$ erfüllt werden, wobei $\underline{b}_{\text{eff}}$ die effektive Beschleunigung ist. Jedoch ist ein genaueres Identifizieren der aufgetretenen Instabilität wegen der Komplexität der hier betrachteten Konfiguration relativ schwierig (s. unten).

2.3.2 Andere Parameterbereiche

Um weitere Eigenschaften des Menzel'schen Modells zu bestimmen, wollen wir unser Verfahren jetzt auf Situationen mit Parametern außerhalb des in Protuberanzen realisierten Bereichs anwenden. Die Tabelle 7 zeigt exemplarisch ω_{min}^2 für verschiedene Parameter beim Ansatz unterschiedlicher Diskretisierungsnetze. Der abnehmende Verlauf von ω_{min}^2 mit wachsender Elementenzahl konvergiert langsamer bei kleineren Werten des Produkts qr als bei größeren. Der Grund liegt in der zunehmenden Konzentration aller Gleichgewichtsgrößen um $y = 0$ bei wachsendem qr , was eine erhöhte Auflösung erfordert. Aus dieser Tabelle geht hervor, daß das Menzel'sche Gesetz außerhalb des für Protuberanzen relevanten Parameterbereiches sowohl für Einzel- als auch für Doppelprotuberanzen instabil sein kann. Auf-

Tabelle 7: Menzel-Modell: Tiefster Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für verschiedene Parameter und Netze mit M Elementen; PZ = 1: Einzelprotuberanz, PZ = 2: Doppelprotuberanz

PZ	k	y	z	r	q	$\omega_{\min}^2$ M = 2	$\omega_{\min}^2$ M = 8	$\omega_{\min}^2$ M = 16	$\omega_{\min}^2$ M = 32
1	1	2,58	10	1	2	1,0890	0,2931	0,2579	0,2305
1	1	2,53	10	6	4	4,1681	0,9171	0,7359	0,6509
1	0	2,22	10	0,5	3	1,1911	0,3047	0,2677	0,2429
1	10	2,22	10	0,5	3	1,1910	0,2380	0,1609	0,1458
1	10	2,55	10	8	6	4,6860	1,1437	0,1057	-0,0043
1	10	2,34	10	4	6	4,7295	0,5524	0,1540	0,1130
1	1	3,14	5	2	1	0,8439	0,3034	0,2560	0,2451
1	10	3,14	10	3	1	1,1874	0,2005	0,0893	0,0803
2	10	6,28	10	3	1	0,4519	0,1488	0,0548	-0,0141
2	0	5,16	10	1	2	0,3396	0,1222	0,0997	0,0647
2	0	4,19	10	1	4	0,3976	0,2019	-0,1089	-0,1559
2	10	3,36	10	0,2	6	0,3451	0,0431	-0,0507	-0,1080
2	10	7,16	10	7	0,5	0,5038	0,1487	0,1020	0,0422
2	1	4,45	10	0,5	3	0,3239	0,0785	0,0387	0,0037
2	10	6,28	10	1,1	1	0,3741	0,0491	0,0210	0,0174

fallend ist, daß zweidimensionale Verschiebungen, d.h. $k = 0$, anders als bei den vorigen Modellen, das Gleichgewicht instabil machen können. Den stabilisierenden Effekt der Wandverschiebung konnten wir diesmal analog zu den vorigen Modellen auch feststellen.

Um andere Stabilitätseigenschaften dieses Modells zu erläutern, wollen wir die Diskussion auf Parameterbereiche konzentrieren, in denen Instabilität auftritt.

Die Abb. 20a stellt den Verlauf von $\omega_{\min}^2$ in Abhängigkeit von r im Fall einer Einzelprotuberanz bei kleinen Wellenlängen in x -Richtung und $q = 6$ dar. Das instabile Verhalten bei $r \gtrsim 8$ entsteht laut der zugehörigen Energieaufteilung (Abb. 20a) als eine Folge von Kompressions- und elektromagnetischen Effekten. Gravitationseffekte wirken ab $r \gtrsim 1$ stark stabilisierend. Im Bereich $r < 8$ ist die Protuberanz stabil, so daß sie mit maximaler Frequenz bei $r \gtrsim 1/q = 0,16$ schwingt. Weit außerhalb des instabilen Parameterbereiches, z.B. wenn k und q kleiner werden, schwingt die Protuberanz am langsamsten für den kleinstmöglichen r -Wert (d.h. $r \gtrsim 1/q$). In diesem r -Bereich wirkt der Kompressionseffekt stets stabilisierend, dagegen die Gravitation destabilisierend. Das gilt für beide von uns betrachteten Fälle mit Einzel- und Doppelprotuberanzen.

Wenn wir r in der Nähe der maximalen Instabilität (Abb. 20a) und dazu noch k sowie Z festhalten, bekommen wir den in der Abb. 21a gezeigten Verlauf von $\omega_{\min}^2$ als Funktion des Parameters q . Das relativ enge Instabilitätsintervall wird größtenteils durch die starke Stabilisierung der Gravitationseffekte für große q -Werte verursacht (Abb. 21b), so daß die Schwingungsfrequenz der Protuberanz mit q sehr schnell wächst. Weit weg vom instabilen Parameterbereich (bei kleineren r - und k -Werten) erhalten wir ein ähnliches Profil wie in Abb. 21a, aber entsprechend angehoben.

Nachdem die Parameter Z , r und $q = 6$ in Abb. 21 festgehalten wurden, haben wir die Wellenzahl k variieren lassen. Die Abb. 22a zeigt den resultierenden Verlauf von $\omega_{\min}^2$. Die Abnahme von $\omega_{\min}^2$ bei wachsendem k ist charakteristisch für alle untersuchten Fälle beider Protuberanzklassen. Die zugehörige Energieaufteilung (Abb. 22b) zeigt ebenfalls die gemeinsame Eigenschaft, nach der für große

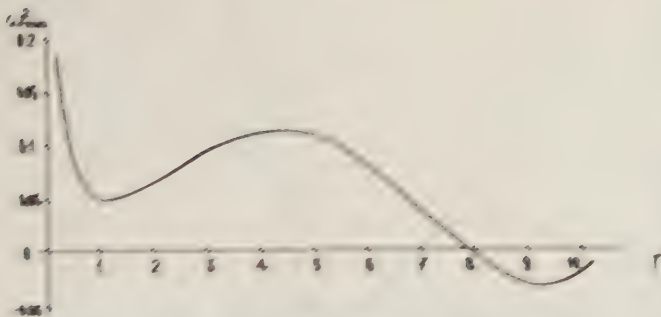


Abb. 19: Tiefster Eigenwert als Funktion von λ für $\lambda = 10$, $\gamma = 1,62-2,6$

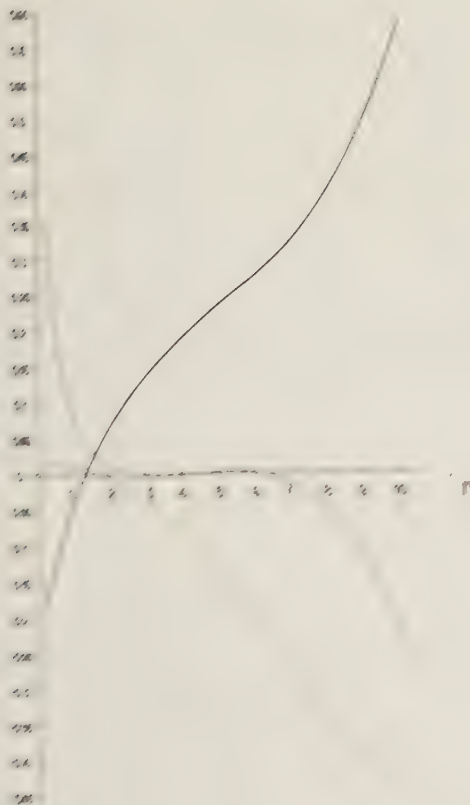


Abb. 20: Menzel-Wiell;

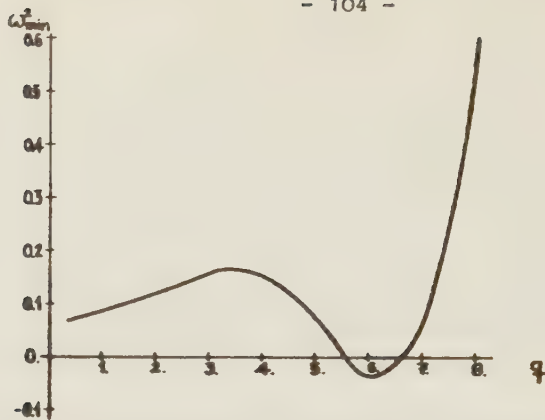
Einzelprotuberanz,

$\lambda = 10$, $\gamma = 1,62-2,6$.

$\lambda = 10$, $\gamma = 1,62-2,6$.

- Gravitationsanteil
- elektromagnetischer Anteil
- Kompressionsanteil

Abb. 21: Aufteilung der Kompressions- und Gravitationsanteile



21a: Tiefster Eigenwert als Funktion von q ($qr > 1$)

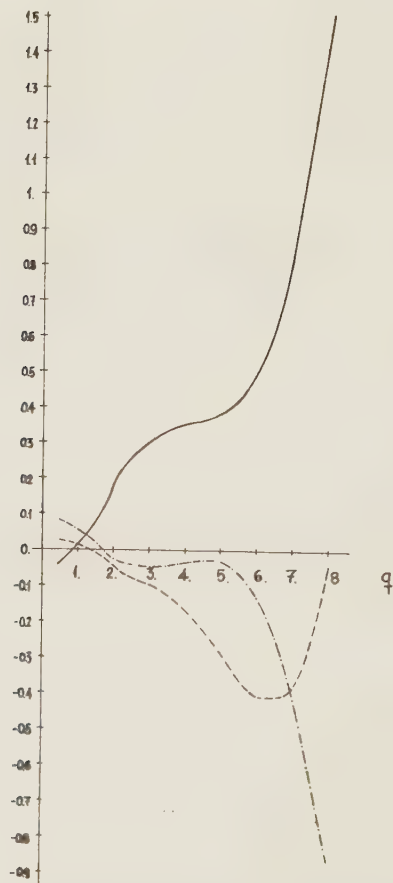
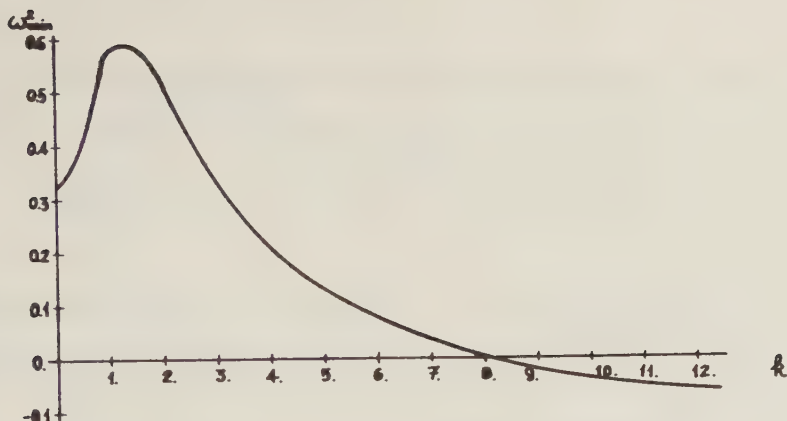


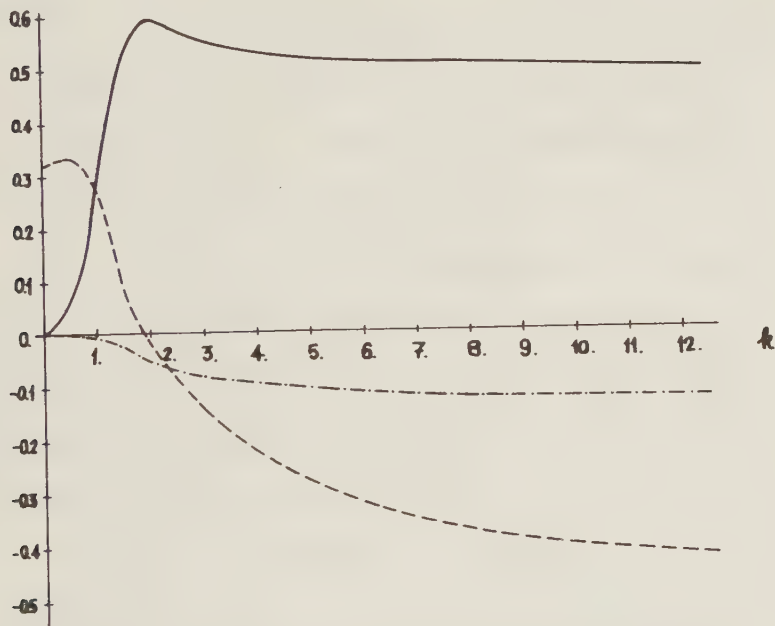
Abb. 21: Menzel-Modell, Einzelprotuberanz;
 $k = 10$; $r = 9$;
 $Z = 10$; $Y = 2,54-3,5$

— Gravitationsanteil
 --- elektromagnetischer Anteil
 - · - · - Kompressionsanteil

21b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von q .



22a: Tiefster Eigenwert als Funktion der Wellenzahl k



22b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion der Wellenzahl k

— Gravitationsanteil, --- elektromagnetischer Anteil,
 -.-.- Kompressionsanteil

Abb. 22: Menzel-Modell: Einzelprotuberanz; $r = 9$; $q = 6$; $Z = 10$;

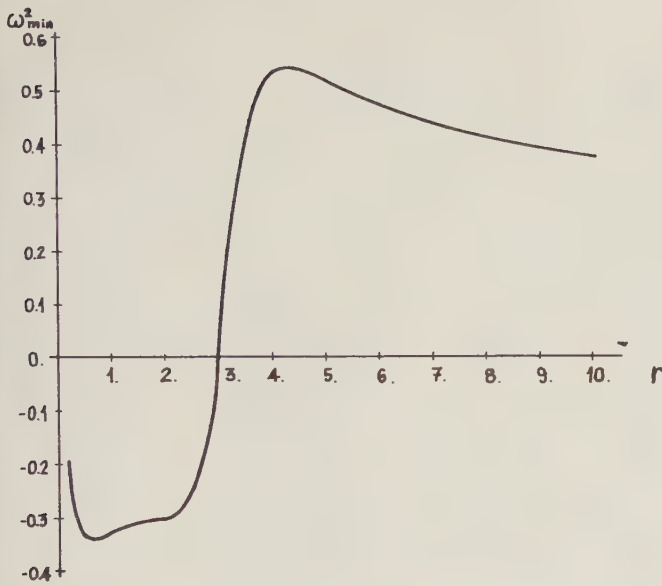
$\gamma = 2,58$.

k-Werte die Verhältnisse der drei Energieanteile untereinander beinahe konstant bleiben. Während bei Einzelprotuberanzen Instabilität nur für relativ große Wellenzahlen auftritt, können Doppelprotuberanzen auch für kleine k, sogar bei $k = 0$, instabil werden.

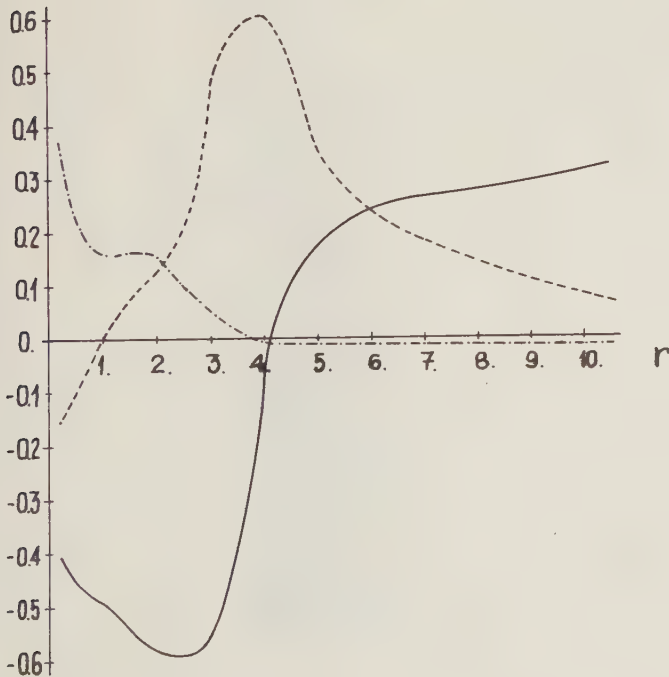
Wir haben mit Hilfe der Energieaufteilung festgestellt, daß die gefundenen Instabilitäten je nach Protuberanzklasse verschiedener Natur sind. Für Einzelprotuberanzen haben wir im wesentlichen eine elektromagnetische Instabilität (Abb. 22b). Andererseits treiben hauptsächlich Gravitationseffekte die Instabilität bei Doppelprotuberanzen. Die Abb. 23 stellt exemplarisch diese Situation für den Fall mittlerer Wellenzahlen und $q = 8$ dar. Wie man aus der Energieaufteilung (Abb. 23b) erkennen kann, bestimmen jetzt die Gravitationseffekte in hohem Maße das Verhalten von $\omega_{\min}^2$; nur bei kleinem r tragen elektromagnetische Effekte zur Instabilität bei. Nach dem relativ scharfen Stabilitätsübergang bei etwa $r = 3$ schwingt die Protuberanz mit einer nur schwach r-abhängigen Frequenz, wobei besonders bei größeren r-Werten der Schwingungsvorgang vorwiegend von der Gravitationskraft bestimmt wird. Eine Senkung des Parameters q wirkt derart, daß $\omega_{\min}^2$ für die meisten r-Werte noch tiefer liegt. Instabilität kann sogar (wie bei $r = 0,5$ und $q = 10$) für das gesamte k-Intervall auftreten; dabei bleibt $\omega_{\min}^2$ ziemlich schwach von k abhängig.

Wir werden jetzt anhand charakteristischer Eigenmoden der oben behandelten Situationen die beteiligten physikalischen Mechanismen näher erläutern.

Die Abb. 24 stellt den Fall einer instabilen Einzelprotuberanz mit den Parametern $r = 9$, $q = 6$, $k = 10$ und $Z = 10$ dar. Die Flüssigkeits-



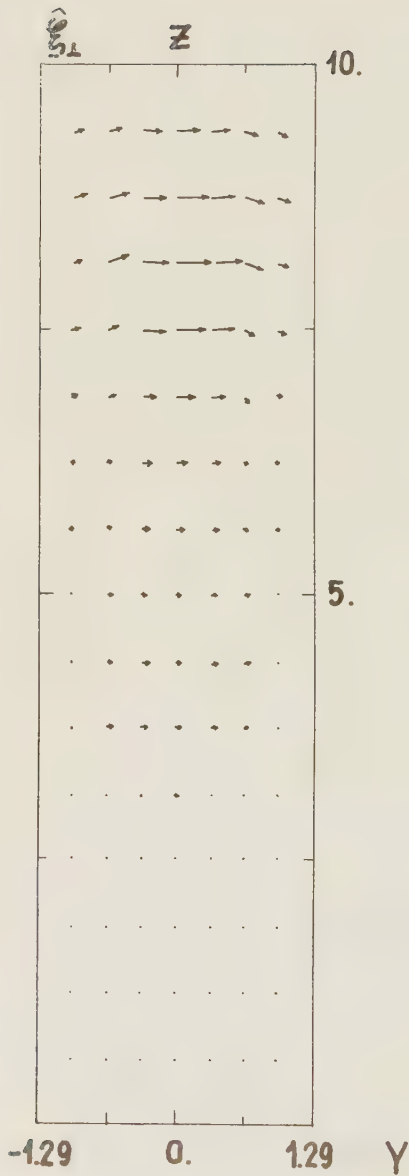
23a: Tiefster Eigenwert als Funktion von $r = (P_{\text{Plasma}}/P_{\text{Magnet}})_{\text{MAX}}$



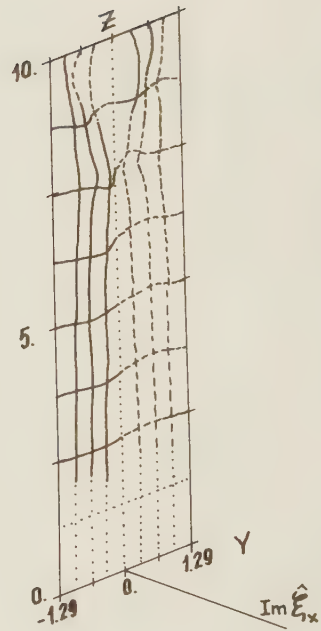
23b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von r

Abb. 23: Menzel-Modell: Doppelprotuberanz;
 $k = 1$; $q = 8$; $Z = 10$;
 $Y = 2,98 - 5,11$.

— Gravitations-
 anteil
 ---- elektromagne-
 tischer Anteil
 -.-.- Kompressions-
 anteil



24a: $\hat{\xi}_\perp$



24b: $\text{Im } \hat{\xi}_x$

Abb. 24: Menzel-Modell: Grundmode, Einzelprotuberanz; $k = 10$;

$Y = 2,58$; $Z = 10$; $r = 9$; $q = 6$; $\omega_{\min}^2 = -0,03011$.

elemente in der (y,z) -Ebene bewegen sich, besonders in der mittleren Region, in horizontaler Richtung, was nicht der Richtung der Feldlinien entspricht (s. unten). Die Komponente $\hat{\xi}_x$ (Abb. 24b) erreicht ihre maximale Amplitude bei ungefähr $(\pm Y/8; 3Z/4)$; diese ist kleiner als die der Komponente $\hat{\xi}_z$ ($|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX}| = 0,008$; $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX}| = 0,4$). Wie man aus der Abb. 22b entnehmen kann, handelt es sich hier um eine Instabilität, bei der sowohl elektromagnetische (in starkem Maße) als auch Kompressionseffekte beteiligt sind. Aus den einzelnen Beiträgen der verschiedenen Energieanteile in jedem Element unseres Diskretisierungsnetzes können wir feststellen, daß die Instabilität im wesentlichen in der mittleren Region $-Y/4 \leq y \leq Y/4$ entsteht. Die Abb. 25 zeigt die obere Hälfte

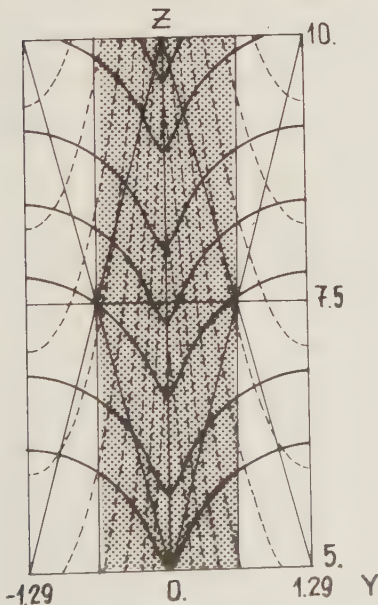


Abb. 25: Menzel-Modell: Instabilitätsgebiet, Einzelprotuberanz

$k = 10$; $Y = 2,58$; $Z = 10$; $r = 9$; $q = 6$.

dieser Region (schattiertes Gebiet) zusammen mit den Feldlinien (durchgezogene Linien) und den zugehörigen Isochoren (gestrichelte Linien). Aus der Orientierung der Feldlinien und der Isochoren geht hervor, daß in der Nähe der Protuberanzebene ($y = 0$) die lokale Instabilitätsbedingung $\nabla \xi \cdot g_{\text{eff}} < 0$ für die durch Krümmungseffekte getriebene Austauschinstabilität erfüllt werden kann. Die von uns erhaltene Anwachsrate $\Gamma_{M1} = \sqrt{g/2ho(q+1)} \omega_{\text{min}} / 2\pi = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ist jedoch um mehrere Zehnerpotenzen kleiner als die der Austauschinstabilität in vereinfachten Situationen. Die gleichzeitige destabilisierende Wirkung der Kompressibilität sowie die komplizierte Konfiguration beschränken diesmal einen solchen Vergleich, so daß eine präzisere Identifizierung im Rahmen unserer Ergebnisse nicht möglich erscheint.

Bei stabilen Situationen in beiden Protuberanzklassen schwingen die Flüssigkeitselemente vorwiegend entlang der Feldlinien. Nur bei Instabilität erhalten wir große Abweichung von dieser bevorzugten Bewegungsrichtung.

Die Abb. 26 stellt die Eigenmode $\hat{\xi}_2$ für eine instabile Doppelprotuberanz der folgenden Parameter $k = 1$, $z = 10$, $r = 0,5$ und $q = 10$ dar. Dieser Fall ist charakteristisch für die meisten von uns gefundenen Instabilitäten bei Doppelprotuberanzen (das trifft z.B. auch für die instabilen Situationen im realisierten Parameterbereich zu). Während sich die Flüssigkeitselemente in der (y,z) -Ebene auf der Trennungslinie ($y = 0$) zwischen beiden Protuberanzen in vertikaler Richtung bewegen, weist diese Bewegung mit wachsendem Abstand von der Trennungslinie eine erhöhte horizontale Komponente auf. Dadurch entsteht der Eindruck einer starken Wechselwirkung zwischen beiden Protuberanzen. Die Flüssigkeitselemente beider

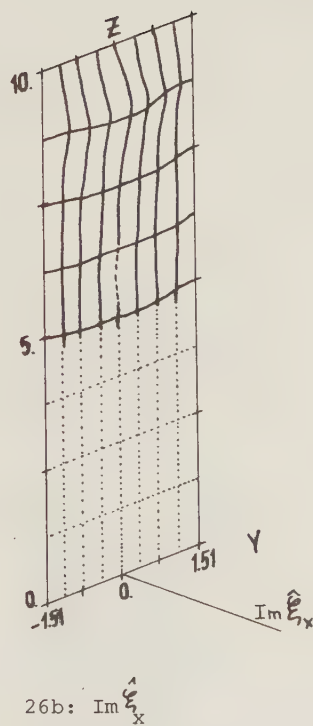
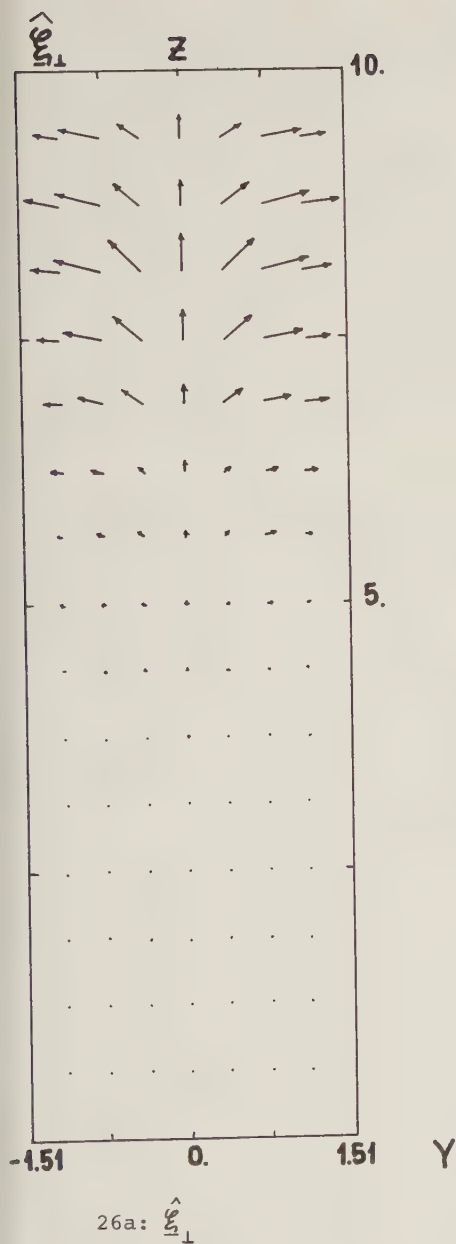


Abb. 26: Menzel-Modell: Grundmode, Doppelprotuberanz; $k = 1$; $Y = 3,02$;
 $Z = 10$; $r = 0,5$; $q = 10$; $\omega_{\min}^2 = -0,3967$.

Protuberanzen bewegen sich entlang der x-Achse in Phase; dabei wird die maximale Amplitude auf der Trennungslinie bei etwa $Z = 8,7$ erreicht. Die Verhältnisse $\left| \hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX} \right|$ und $\left| \hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX} \right|$ sind ungefähr gleich (0,3). Wie wir bereits erwähnt haben, werden alle von uns erhaltenen Instabilitäten bei Doppelprotuberanzen zum großen Teil durch Gravitationseffekte getrieben. Die destabilisierende Wirkung der elektromagnetischen Effekte ist auch hier relativ klein ($\delta G / \delta M \approx 6$). Wir stellen anhand der einzelnen Beiträge der Diskretisierungselemente zu δK , δG und δM fest, daß die Instabilität in der mittleren Region (um die Trennungslinie) entsteht. Die Abb. 27 zeigt die obere Hälfte dieser Region, die das Gebiet zwischen den Protuberanzzentren ($y = \pm Y/4$) umfaßt. Obwohl im gesamten Protube-

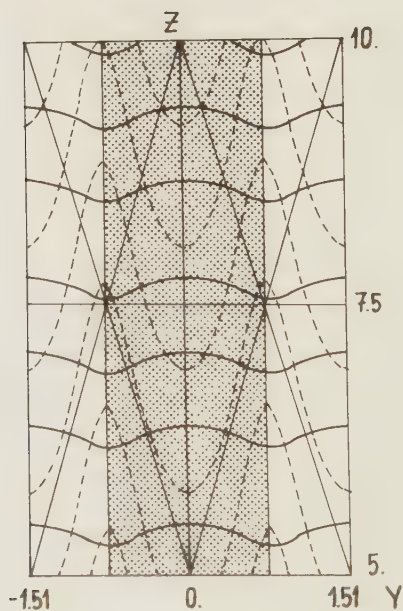


Abb. 27: Menzel-Modell: Instabilitätsgebiet, Doppelprotuberanz;
 $k = 1$; $Y = 3,02$; $Z = 10$; $r = 0,5$; $q = 10$.

ranzgebiet $\underline{g} \cdot \nabla \varphi > 0$ gilt, liefert der zweite Term von δG , d.h. $(\underline{g} \cdot \underline{\xi}) \nabla \cdot \underline{\xi}$, den Hauptbeitrag zur Instabilität. Ferner erzeugt die Krümmung der Feldlinien um $y = 0$ ausreichende Zentrifugalbeschleunigung $\underline{b}_{\text{eff}}$, so daß die lokale Bedingung für krümmungsgetriebene Austauschinstabilität $\underline{b}_{\text{eff}} \cdot \nabla \varphi < 0$ erfüllt ist, obwohl die Gravitationseffekte überwiegen. Wir erhalten die Anwachsrate $\Gamma_{M2} = 7,7 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, was wieder wenigstens um eine Größenordnung von der Anwachsrate der Rayleigh-Taylor-Instabilität sowie der Austauschinstabilität bei vereinfachten Systemen abweicht. Die aufgetretene Instabilität weist Züge beider Instabilitätsklassen auf.

Als letzten Punkt wollen wir hier die Struktur der Verschiebung für den Fall $k = 0$ diskutieren. Die Bedingung $B_x = 0$, der das Menzel'sche Modell ebenso wie die beiden vorigen Modelle genügt, führt wieder zu den Verschiebungen i) und ii). Wir haben für dieses Modell die folgende Sachlage herausgefunden: Für eine Höhe $Z = 10$ und $r \gtrsim 2$ besitzt die niedrigste Energie für alle q -Werte vorwiegend die Verschiebung i). Dagegen tritt die Verschiebung ii) als die mit der niedrigsten Energie bei Fällen mit $r > 2$ und beliebigem q auf. Wenn man Z verkleinert, wird sich der kritische r -Wert von 2 zu einem kleineren Wert verschieben. In allen instabilen Situationen kommt als Grundmode die Verschiebung i) vor (vgl. Absatz 1.3). Diese Eigenschaften gelten sowohl für Einzel- als auch für Doppelprotuberanzen.

2.4 Modell von Lerche und Low

Wir sind bereits im Absatz 1.3 kurz auf die Stabilitätseigenschaften dieses Modells eingegangen. Wir konnten jedoch nur eine beschränkte Stabilitätsaussage erzielen. Jetzt wollen wir als letztes Anwendungsbeispiel unseres numerischen Verfahrens die Stabilität dieses Modells bezüglich allgemeinerer Verschiebungen untersuchen. Wir benutzen bei unserer Untersuchung neben den in (III.38) und (IV.30) gegebenen normierten Größen noch die folgenden Größen:

$$\mathbf{x} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{h_0} ; \quad k = h_0 \tilde{k} ; \quad \omega^2 = \frac{h_0 \tilde{\omega}^2}{g} \quad (\text{IV.40})$$

Dabei ist h_0 die barometrische Skalenhöhe. Das Lerche-Low-Gleichgewicht hat zwei freie Parameter, nämlich das typische Druckverhältnis $\beta = P_{\text{Plasma}} / 2P_{\text{Magnet}}$ und den konstanten Wert des Magnetfeldes in x-Richtung $G = B_x = \text{konst.}$ Weitere Parameter sind diesmal die Dicke Y und die Höhe des Plasmagebietes sowie die Wellenzahl k entlang der Protuberanzachse.

Anders als bei den vorigen Modellen führt das Vorhandensein eines Magnetfeldes in x-Richtung zu einer allgemeinsten Verschiebung $\tilde{\mathbf{x}}$, deren drei Komponenten jetzt komplexe Größen sind (s. Anhang C). Nur wenn $B_x = 0$ bzw. $k = 0$ sind, erhält man wiederum eine vereinfachte Verschiebung der Form, die wir bereits in den vorigen Modellen angewandt haben. Wenn $B_x \neq 0$ und $k \neq 0$ sind, haben wir es in unserem numerischen Verfahren (im Gegensatz zu den vereinfachten Situationen) mit doppelt so vielen Variablen zu tun. Man benötigt hier eine entsprechend erhöhte Rechenzeitkapazität. Wir mußten uns aufgrund der begrenzten uns zur Verfügung stehenden Rechenzeit in diesem Fall auf ein weniger genaues Diskretisierungsschema beschränken; wir haben daher den Fall $B_x \neq 0$ und $k \neq 0$ mit Netzen, die bis

zu 16 Elemente besitzen, behandelt.

2.4.1 Parameterbereich der Sonnenprotuberanzen

Wir wollen zunächst auf die wichtigste Frage eingehen, welche Stabilitätseigenschaften dieses Modell für den in Protuberanzen realisierten Parameterbereich besitzt. Anschließend werden wir unsere Resultate mit den Beobachtungen vergleichen. Wir schätzen zuerst diesen Parameterbereich ab. Wenn man die Temperatur $7 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$, Elektronendichte $5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ und eine Magnetfeldstärke $B_0 = 5\text{G}$ für eine typische Protuberanz voraussetzt, bekommt man $\beta = 0,025$; dieser β -Wert entspricht einer Magnetfeldkonfiguration mit relativ flachen, offenen Feldlinien. Die Beobachtungen zeigen, daß die Magnetfeldkomponente B_x von Protuberanz zu Protuberanz unterschiedliche Stärke aufweist. Leroy (1978) hat die typische Orientierung B_y/B_x für verschiedene Protuberanztypen durch Polarisationsmessungen von Spektrallinien bestimmt. Für Protuberanzen, die auf der magnetischen Neutrallinie zwischen zwei bipolaren Regionen liegen, ist B_y/B_x vorwiegend kleiner als 0,5. Für Protuberanzen, welche auf der Neutrallinie einer einzelnen bipolaren Region liegen, ist B_y/B_x normalerweise größer als 0,5. Wir haben für unsere Anwendung das Intervall $0,25 \leq B_y/B_x \leq 10$ berücksichtigt, was dem Orientierungswinkel-Intervall $15^\circ \leq \theta = \arctan(B_y/B_x) \leq 84^\circ$ entspricht. Um den zugehörigen B_x -Wert zu erhalten, haben wir die B_y -Komponente durch ihr im Modell gegebenes Maximum innerhalb des Protuberanzgebietes ersetzt. Wir bekommen aus (III.47) $\text{Max}_{(Y,Z)} B_y = 1$ (d.h. $\tilde{B}_{y \text{ MAX}} = B_0$) und damit $0,1 \leq B_x \leq 4$. Ferner betrachten wir typische Protuberanzen der Dicke $\tilde{Y} = 5 \cdot 10^3 \text{ km}$, d.h. $Y = 23,7$ und Höhe $\tilde{Z} = 1,5 - 5 \cdot 10^4 \text{ km}$, d.h. $Z = 71 - 237$. Nach den Beobachtungen periodischer Strukturen in Protuberanzen (Nakagawa und McKim Mal-

ville, 1969) berücksichtigen wir das folgende Wellenzahl-Intervall: $0,017 \leq k \leq 0,06$. Wir haben für den gesamten, oben gegebenen Parameterbereich stets ein stabiles Verhalten des Modells bekommen. Die Tabelle 8 zeigt zusammenfassend $\omega_{\min}^2$, die Frequenz $\nu_{\min} = \sqrt{g/h_0} \omega_{\min}/2\pi$ sowie die Periode $P = 1/\nu_{\min}$ für verschiedene realisierte Fälle; $\omega_{\min}^2$ ändert sich bei festgehaltenen Parametern durch die Dickenvergrößerung nur wenig. Das Achsenfeld B_x bestimmt offen-

Tabelle 8: Lerche-Low-Modell: $\omega_{\min}^2$, Grundfrequenz $\nu_{\min}$ sowie Periode beim beobachteten Parameterbereich; ($M = 16$).

k	Y	Z	β	B_x	$\omega_{\min}^2 (10^{-2})$	$\nu_{\min} (10^{-4} \text{ s}^{-1})$	P (Min)
0,017	23,7	71	0,025	0,1	2,9397	9,8334	16,948
0,04	23,7	71	0,025	0,1	2,9394	9,8329	16,949
0,066	23,7	71	0,025	0,1	2,9389	9,8321	16,951
0,017	23,7	237	0,025	4	0,3515	3,4002	49,015
0,04	23,7	237	0,025	4	0,4865	4,0003	41,663
0,066	23,7	237	0,025	4	0,7786	5,0607	32,933

sichtlich die k-Abhängigkeit der Schwingungsperiode. Wir erhalten Perioden bei allen von uns betrachteten Fällen zwischen etwa 17 und 50 Min.

Wir werden jetzt anhand einer für die betrachteten Fälle typischen Eigenmode weitere Eigenschaften der gefundenen Schwingungen erläutern. In der vorliegenden Situation können wir die allgemeinste Mode in der folgenden Form schreiben: $\underline{\xi} = \left[(\hat{\xi}_{x\text{Re}} + i \hat{\xi}_{x\text{Im}}) + (\hat{\xi}_{1\text{Re}} + i \hat{\xi}_{1\text{Im}}) \right] e^{ikx}$; wir können immer eine Phase kx finden, so daß $\text{Re} \underline{\xi} = \text{Re} \hat{\xi}$ oder $\text{Im} \underline{\xi} = \text{Im} \hat{\xi}$ gilt. Diese beiden Möglichkeiten stellen dann zwei gleichberechtigte Beschreibungen des physikalischen Vor-

gangs dar.

Die Abb. 28 zeigt $\text{Re} \hat{\xi}$ für eine der gefundenen stabilen Situationen im realisierten Parameterbereich. Die Flüssigkeitselemente schwingen in der (y,z)-Ebene hauptsächlich entlang der Feldlinien, d.h. beinahe in horizontaler Richtung. Die Mode $\text{Re} \hat{\xi}$ erreicht ihre maximale Amplitude etwa im Mittelpunkt des Plasmagebietes. Während das Verhältnis $\left| \hat{\xi}_{x \text{ MAX}} / \hat{\xi}_{y \text{ MAX}} \right|$ ungefähr 0,1 beträgt, ist $\left| \hat{\xi}_{x \text{ MAX}} / \hat{\xi}_{z \text{ MAX}} \right|$ von Ordnung 10. Der hier beschriebene Verlauf von $\text{Re} \hat{\xi}$ wurde bei einem großen Teil der behandelten realisierten Situationen erhalten.

Die Analyse der einzelnen Beiträge zur Schwingungsenergie zeigt, daß für Fälle mit relativ kleinem Achsenfeld (z.B. $B_x = 0,1$) der Schwingungsvorgang im wesentlichen durch Kompressionskräfte bestimmt wird. Andererseits führt die Vergrößerung der Stärke des Achsenfeldes zu einer verstärkten Beteiligung der elektromagnetischen Kräfte am Schwingungsvorgang. Wenn z.B. $B_x = 4$ wird, macht der elektromagnetische Anteil bereits etwa 1/3 der gesamten Schwingungsenergie aus. Gravitationseffekte wirken durchweg in geringem Maße stabilisierend.

Aus unseren Resultaten folgern wir, daß das Lerche-Low-Modell eine gute Beschreibung der beobachteten horizontalen Schwingungen in Protuberanzen liefern kann (s. z.B. Kleczek und Kuperus, 1969). Beobachtungen können jedoch noch keine Höhenabhängigkeit der Schwingungsamplitude feststellen. Die von uns bestimmten Perioden liegen vorwiegend im gemessenen Bereich, d.h. 6 - 40 Min (Ramsey und Smith, 1969).

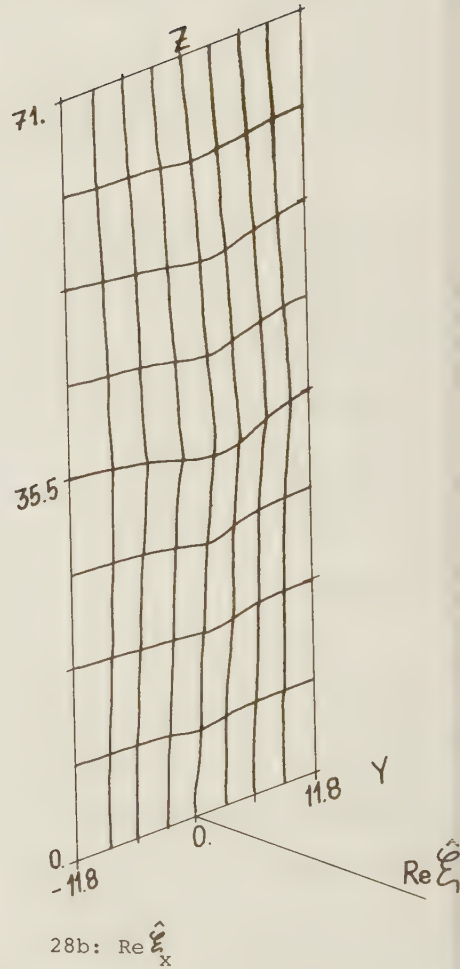
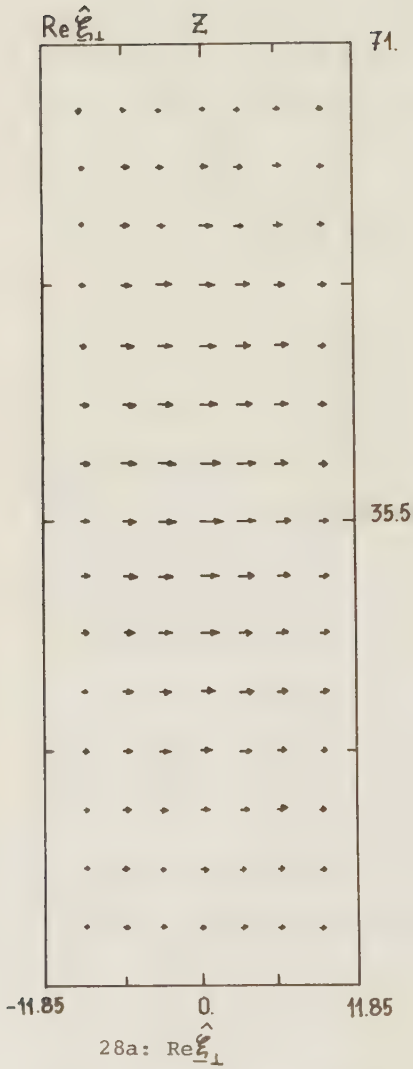


Abb. 28: Lerche-Low-Modell: Grundmode für beobachtete Parameter,

$k=0,017$; $Y=23,7$; $Z=71$; $\beta=0,025$; $B_x=0,1$; $\omega_{\min}^2=0,00294$.

2.4.2 Andere Parameterbereiche

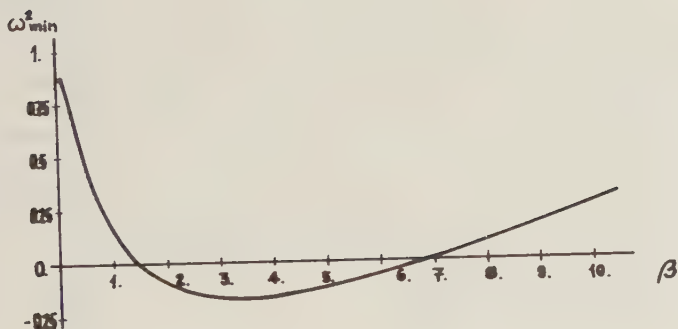
Zur Ergänzung der oben bestimmten Stabilitätseigenschaften des Lerche-Low-Modells werden wir hier das Stabilitätsverhalten außerhalb des realisierten Parameterbereiches untersuchen. Aufgrund der Tatsache, daß die charakteristischen Merkmale des Gleichgewichts (z.B. Neutralpunkte, Knick-Stellen, geschlossene Feldlinien usw.) innerhalb eines relativ engen Gebiets in der (y,z) -Ebene konzentriert sind, betrachten wir zur Illustration vorwiegend eine Protuberanz mit dem relativ kleinen Gebiet $Y = 4$ und $Z = 5$. Wenn wir diese Abmessungen vergrößern, erhalten wir im wesentlichen den erwarteten abnehmenden Verlauf von $\omega_{\min}^2$. Die Tabelle 9 stellt den tiefsten Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für ausgesuchte Fälle bei Anwendung verschiedener Diskretisierungsnetze dar. Der Parameter β , der die Topologie der Feldlinienkonfiguration festsetzt, bestimmt im wesentlichen die Konvergenz von $\omega_{\min}^2$; bei kleineren β -Werten (offene Feldlinien) konvergiert $\omega_{\min}^2$ schneller als bei größeren β -Werten (komplizierte Feldkonfiguration, was bessere Auflösung erfordert). Aus dieser Tabelle geht hervor, daß das Lerche-Low-Gleichgewicht in mehreren Parameterbereichen instabil sein kann. Ferner stellt sich heraus, daß ein erhöhtes Achsenfeld B_x das Gleichgewicht stabilisieren kann.

Um die oben kurz erwähnten Eigenschaften des Modells eingehend zu erläutern, wollen wir an dieser Stelle unsere Diskussion zum großen Teil auf die instabilen Parameterbereiche und ihre Umgebung beschränken. Die Abb. 29a zeigt den Verlauf von $\omega_{\min}^2$ als Funktion von β im Fall kleiner Wellenlängen und bei abgeschaltetem Achsenfeld. Aus der Energieaufteilung (Abb. 29b) entnehmen wir, daß die in dem mittleren β -Bereich aufgetretene Instabilität hauptsächlich

Tabelle 9: Lerche-Low-Modell: Tiefster Eigenwert $\omega_{\min}^2$ für verschiedene Parameter und Netze mit M Elementen.

k	Y	Z	β	B_x	$\omega_{\min}^2$ M = 2	$\omega_{\min}^2$ M = 4	$\omega_{\min}^2$ M = 8	$\omega_{\min}^2$ M = 16	$\omega_{\min}^2$ M = 32
1	4	5	1	0	1,6035	0,7325	0,6454	0,4813	0,4022
0,01	4	5	1	0	0,7673	0,4260	0,2945	0,2511	0,2306
10	4	5	1	0	1,6039	0,5311	0,3806	0,1839	0,1672
1	4	5	0,1	0	1,5418	1,1505	1,0091	0,9799	0,9774
10	4	8	2	0	1,8641	0,9656	0,4368	-0,0139	-0,0426
10	4	5	5	0	2,1942	0,9590	0,5025	-0,0296	-0,1220
3	4	5	3	0	1,8108	0,6220	0,3670	-0,0213	-0,0696
0	10	10	2	1	0,5467	0,1667	0,0910	0,0498	0,0375
0	1	1	0,1	0,1	24,176	18,868	16,429	15,996	15,210
0	4	5	1	10	0,1906	0,0093	0,0040	0,0020	0,0014
10	10	10	0,1	0,001	0,2683	0,1709	0,1507	0,1399	
10	10	10	0,1	0,1	2,5117	1,3438	1,0386	0,4947	
1	4	5	10	0,01	3,1247	1,7313	1,3461	1,1022	
10	4	5	2	0,01	1,6936	0,5055	0,2917	-0,0567	
10	4	5	2	1	183,09	88,550	76,116	52,238	
10	4	5	4	0,01	2,0198	0,8106	0,4148	-0,0810	

elektromagnetischer Natur ist. Gravitationseffekte wirken über den gesamten β -Bereich destabilisierend, tragen aber zur Instabilität recht wenig bei. Kompressionseffekte wirken dagegen stets stabilisierend, so daß sie bei sehr kleinen β -Werten die stabilen Schwingungen überwiegend bestimmen. Andererseits werden die stabilen Schwingungen bei großen β -Werten etwa gleich durch Kompressions- und elektromagnetische Effekte bestimmt. Weit außerhalb des instabilen Parameterbereichs, d.h. wenn k genügend verkleinert oder B_x vergrößert wird, bleibt, entsprechend angehoben, im wesentlichen das $\omega_{\min}^2$ -Profil erhalten.



29a: Tiefster Eigenwert als Funktion von $\beta = P_{\text{Plasma}}/2P_{\text{Magnet}}$ | typisch



29b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von β

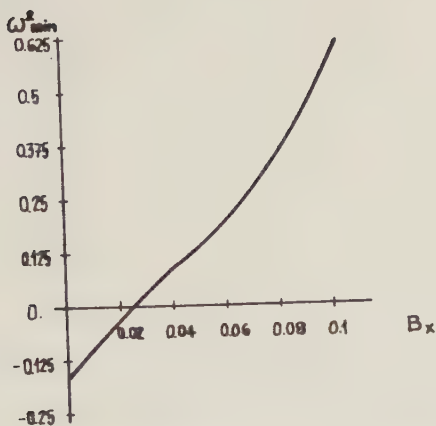
— Gravitationsanteil, ---- elektromagnetischer Anteil, -.-.- Kompressionsanteil.

Abb. 29: Lerche-Low-Modell: $k = 10$, $Y = 4$, $Z = 5$, $B_x = 0$

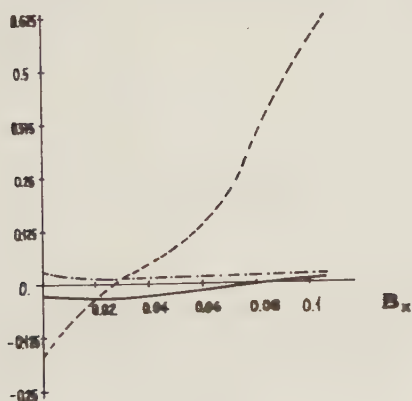
Die Abb. 30a stellt den B_x -abhängigen Verlauf von $\omega_{\min}^2$ vor, welchen wir aus der vorigen Situation durch Festhalten von k und β im instabilen Bereich bekommen. Man erkennt die starke stabilisierende Wirkung des Achsenfeldes B_x . Wie erwartet sind dabei die elektromagnetischen Effekte beinahe allein verantwortlich für eine solche Stabilisierung (Abb. 30b). Wir erhalten jedoch weit außerhalb des instabilen Bereichs (z.B. bei $k = 1$ und $\beta = 0,1$) eine destabilisierende Wirkung der Erhöhung der Achsenfeldstärke bis zu $B_x \sim 1$; danach verursacht die weitere B_x -Vergrößerung erneut eine Zunahme der Schwingungsfrequenz.

Wenn wir jetzt β und B_x im instabilen Bereich festhalten und k variieren lassen, erhalten wir den in der Abb. 31a gezeigten Verlauf von $\omega_{\min}^2$. Das stark ausgeprägte Maximum bei $k \sim 1$ ist charakteristisch für alle Fälle im instabilen Parameterbereich, ebenfalls die sehr schwache k -Abhängigkeit von $\omega_{\min}^2$ für große k -Werte. Die Energieaufteilung (Abb. 32b) liefert das Resultat, daß die stabilen Schwingungen mit sehr kleinem k -Wert vorwiegend durch die elektromagnetische Kraft bestimmt werden. Ferner bleiben die Verhältnisse der verschiedenen Energieanteile untereinander für große k -Werte fast konstant. Wenn wir zu stärkeren Achsenfeldern übergehen, erhalten wir stets Stabilität. Die Abb. 32a zeigt den typischen k -abhängigen $\omega_{\min}^2$ -Verlauf in einer solchen Situation; $\omega_{\min}^2$ wächst diesmal monoton mit k , wobei die Schwingungen etwa in gleichem Maße durch Kompressions- und elektromagnetische Kräfte bestimmt werden (s. Abb. 32b).

Wie sich die zugehörigen Eigenmoden bei den oben beschriebenen Situationen verhalten, werden wir im folgenden mit Hilfe typischer Fälle ausführlich beschreiben. Dazu diskutieren wir jeweils die beteiligten physikalischen Mechanismen.

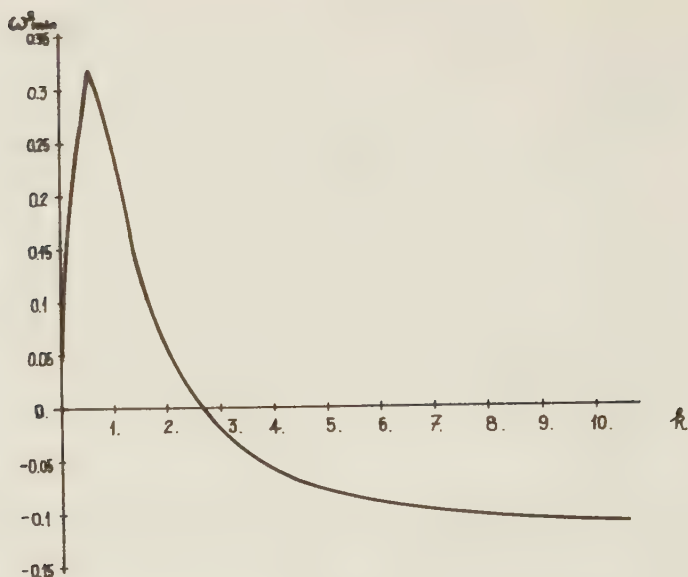


30a: Tiefster Eigenwert als Funktion des Achsenfeldes B_x

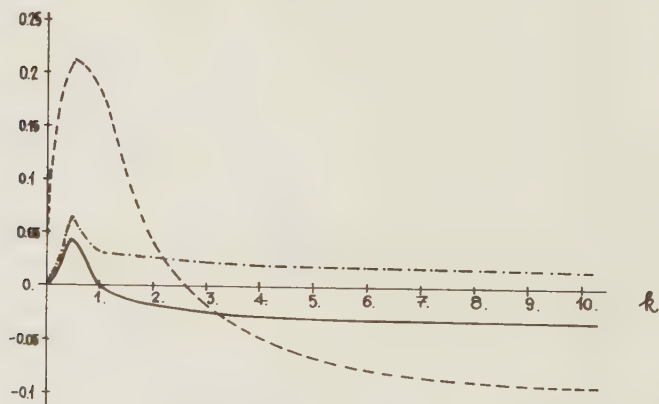


30b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von B_x
 — Gravitationsanteil, ---- elektromagnetischer
 Anteil, -.-.- Kompressionsanteil

Abb. 30: Lerche-Low-Modell; $k = 10$, $\gamma = 4$, $z = 5$, $\beta = 3$.



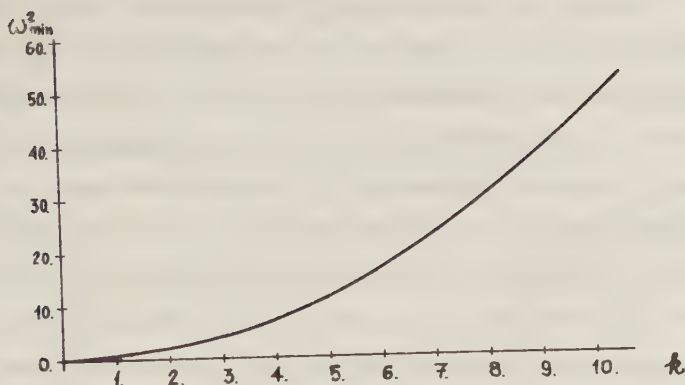
31a: Tiefster Eigenwert als Funktion der Wellenzahl k



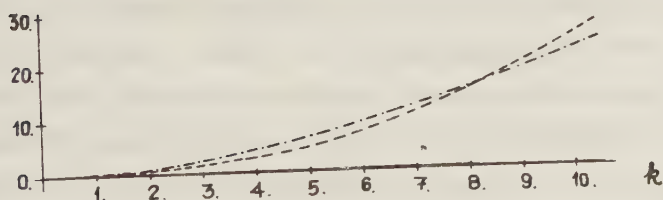
31b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von k

—— Gravitationsanteil, ---- elektromagnetischer
Anteil, -.-.- Kompressionsanteil

Abb. 31: Lerche-Low-Modell; $Y = 4$, $Z = 5$, $\beta = 3$, $B_x = 0,01$.



32a: Tiefster Eigenwert als Funktion der Wellenzahl k



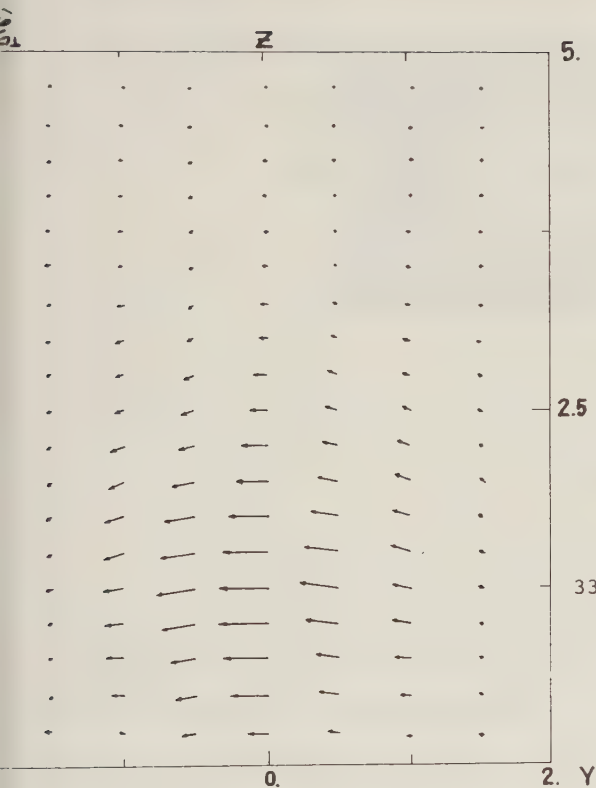
32b: Aufteilung der Grundenergie als Funktion von k

— Energieanteil, ---- elektromagnetischer Anteil, -.-.- Kompressionsanteil

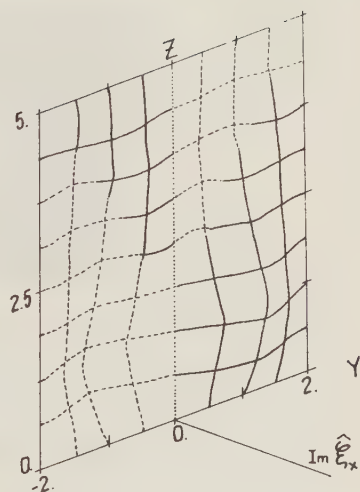
Abb. 32: Lerche-Low-Modell: $Y = 4$, $Z = 5$, $\beta = 3$, $B_x = 1$.

Die Abb. 33 stellt die Verschiebung $\hat{\xi}$ für den Fall einer instabilen Protuberanz mit $\beta = 3$ und bei großer Wellenzahl k dar. Wegen $B_x = 0$ hat $\hat{\xi}$ nur drei Komponenten; wir haben $\hat{\xi}_x$ rein imaginär und $\hat{\xi}_1$ rein reell vorausgesetzt. Die Feldlinienkonfiguration in diesem Fall wurde in der Abb. 5a gezeigt. In allen Situationen mit $\beta > 2$, d.h. mit geschlossenen Feldlinien wie hier, ist die Verschiebungsamplitude von $\hat{\xi}$ normalerweise größer in der unteren als in der oberen Region. In diesem Fall erreicht $\hat{\xi}_1$ die maximale Amplitude etwa um das Zentrum dieser unteren Region; die Komponente $\hat{\xi}_x$ ist y-symmetrisch und ihre Amplitude wird ungefähr bei $(+1, 1, 25)$ maximal. Während $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_y \text{ MAX}|$ ungefähr 1 ist, ist $|\hat{\xi}_x \text{ MAX} / \hat{\xi}_z \text{ MAX}|$ von der Größenordnung 0,1. Wie aus der Abb. 29b hervorgeht, handelt es sich hier in erster Linie um eine elektromagnetische Instabilität, dazu kommt eine schwache destabilisierende Wirkung durch Gravitationseffekte. Aus der Verteilung der einzelnen Energieanteile auf die Diskretisierungselemente können wir folgern, daß die elektromagnetische Instabilität hauptsächlich in der unteren Hälfte des Gebietes, aber außerhalb einer um den O-Punkt etwa kreisförmigen Region mit Radius $R \approx 1$ wirksam ist. Der maximale Beitrag zu dieser Instabilität wird unterhalb dieser Region zwischen $y = -1$ und $y = 1$ geleistet. Die Abb. 34 zeigt die (schattierte) Region, wo δM negativ wird. Die schwach destabilisierenden Gravitationseffekte leisten ihren maximalen Beitrag in der Region: $-1 \leq y \leq 1$ mit $z \leq 2,5$. Bei diesem Gleichgewicht sind die Isochoren (gestrichelte) Kreise mit Zentrum im Ursprung, so daß der Massendichtegradient radial zum Ursprung zeigt.

Die konzentrischen, geschlossenen Feldlinien erinnern wie beim Dungey-Modell an eine diffuse Pinchkonfiguration. Wieder macht die Tatsache, daß der O-Punkt mit dem Ort des Massendichte-Maximums



33a: $\hat{\xi}_1$



33b: $\text{Im} \hat{\xi}_x$

Abb. 33: Lerche-Low-Modell: Grundmode, $k = 10$, $Y = 4$, $Z = 5$,

$$\beta = 3, B_x = 0; \omega_{\min}^2 = -0,1666.$$

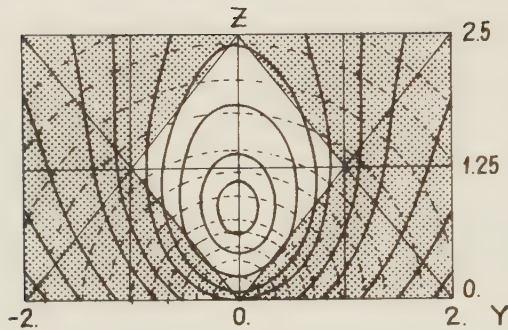


Abb. 34: Lerche-Low-Modell: Instabilitätsregion, $k = 10$, $\gamma = 4$,
 $z = 5$, $\beta = 3$, $B_x = 0$.

(bei $y = z = 0$) nicht zusammenfällt, die Übertragung der Pinch-Resultate auf das hier behandelte Gleichgewicht recht schwierig. Die Verschiebung $\hat{\xi}_\perp$ weist jedoch die charakteristische Orientierung wie bei einer $m = 1$ Kink-Instabilität des Pinchgleichgewichtes auf. Die Anwachsrate dieser Instabilität bei einem z -Pinch (d.h. Stromdichte in x -Richtung und $B_x = 0$) mit gleichförmig verteilter Stromdichte, keiner Wand und unter der Annahme der Inkompressibilität ist durch $\Gamma_{m=1} \sim v_A / \tilde{a}$ gegeben (Tayler, 1957a). Wir erhalten für $\tilde{a} = 1 \cdot h_0$ und $v_A = 4,88 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$, $\Gamma_{m=1} = 0,231 \text{ s}^{-1}$. Andererseits liegt die Anwachsrate im vorliegenden Fall bei $\Gamma_{LL} = \sqrt{g/h_0} \cdot \omega_{\min} / 2\pi = 2,34 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Der Unterschied zwischen beiden Anwachsrate kann möglicherweise wieder besonders auf die stabilisierende Wirkung der Wände zurückgeführt werden. Der k -abhängige Verlauf von $\omega_{\min}^2$ im vorliegenden Fall ist qualitativ derselbe wie in der Abb. 31a und konsistent mit dem Pinch-Resultat, nach dem eine ideal leitende Wand hauptsächlich große Wellenlängen sta-

bilisieren kann (s. z.B. Tayler, 1957b; Shafranov, 1957). Bei großen k -Werten ist der erhaltene $\omega_{\min}^2$ -Verlauf ebenfalls konsistent mit dem asymptotischen Verhalten für $k \gg 1$ bei der z -Pinchkonfiguration mit gleichförmig verteilter Stromdichte (Tayler, 1957a). Wir können daher auch hier erwarten, daß es sich bei der aufgetretenen Instabilität mit $B_x = 0$ um eine durch Gravitationseffekte verzerrte $m = 1$ kink-Instabilität handelt.

Es ist interessant zu bemerken, daß die Lerche-Low-Feldkonfiguration offensichtlich gekrümmte Feldlinien enthält, deren Zentrifugalbeschleunigung $\underline{b}_{\text{eff}}$ die lokale Bedingung für die krümmungsgetriebene Austauschinstabilität $\underline{b}_{\text{eff}} \cdot \nabla \varphi < 0$ erfüllt (z.B. in der Region, wo δM maximal wird, Abb. 34). Dies ist wiederum mit der Tatsache zu erklären, daß in der Klasse der Pinch-Instabilitäten eine solche Austauschinstabilität für große k -Werte enthalten ist.

Die Einschaltung des Achsenfeldes B_x erzeugt eine Konfiguration, welche in ihrer unterschiedlichen Region teilweise einem diffusen Screw-Pinch entspricht. Wenn wir von der vorigen Situation ausgehend ein Achsenfeld mit $B_x = 0,01$ einschalten, wird die Instabilität geschwächt. Diese von uns gefundene stabilisierende Wirkung eines Achsenfeldes ist ebenfalls bei einfachen Pinchkonfigurationen seit langem bekannt (s. z.B. Shafranov, 1957; Schuurman et al., 1969). Während $\hat{\xi}_1$ jetzt praktisch ungeändert bleibt, wird das Verhältnis $\left| \text{Re } \hat{\xi}_x \text{ MAX} / \text{Re } \hat{\xi}_{-1 \text{ MAX}} \right|$ erheblich reduziert. Nach der Abb. 30b sind diesmal auch elektromagnetische und Gravitationseffekte für die Instabilität verantwortlich. Jedoch beträgt das Verhältnis $\delta M / \delta G = 2,8$ (in der vorigen Situation hatte man $\delta M / \delta G = 6,5$). Die Entstehungsorte der Instabilität sowie die Regionen, in denen der maximale Beitrag zur Instabilität geleistet wird, werden durch die

Einschaltung des Achsenfeldes im wesentlichen nicht geändert. Wir haben es daher jetzt mit einer durch ein Achsenfeld geschwächten und durch Gravitationseffekte verzerrten Kink-Instabilität eines Screw-Pinches zu tun. Wir erhalten stets beim festen Wandabstand/Pinch-radius ≈ 2 die Stabilisierung für große Wellenlängen (Abb. 31a). Ferner stabilisiert das Achsenfeld vorwiegend Verschiebungen mit kurzer Wellenlänge (Abb. 30a). Dies entspricht dem Stabilitätsverhalten von verschiedenen Screw-Pinchkonfigurationen (s. z.B. Shafranov, 1957; Schuurman et al., 1969).

Wenn wir das Achsenfeld weiter bis zu $B_x = 0,1$ erhöhen, erhalten wir eine stabile Protuberanz. Die Abb. 35 zeigt die Grundmode $\text{Re} \hat{\xi}$ für diesen Fall. Aus der Abb. 30b geht hervor, daß die Schwingung fast nur durch die elektromagnetische Kraft bestimmt wird; $\text{Re} \hat{\xi}_1$ weist einen relativ komplizierten Verlauf auf. Die Flüssigkeitselemente bewegen sich in der (y,z)-Ebene derart, daß vier wirbelartige Strukturen entstehen. Die Symmetrie der Verschiebung wurde hier (wie bei den meisten Fällen mit $B_x \neq 0$) leicht gestört. Die Komponente $\text{Re} \hat{\xi}_x$ erreicht ihre maximale Amplitude ungefähr an demselben Ort wie beim Fall $B_x = 0$. Die Verhältnisse $\left| \text{Re} \hat{\xi}_x / \text{Re} \hat{\xi}_y \right|$ und $\left| \text{Re} \hat{\xi}_x / \text{Re} \hat{\xi}_z \right|$ sind etwa gleich und von der Größenordnung 0,35.

Wir haben bereits beim realisierten Parameterbereich gesehen, daß die Flüssigkeitselemente in der stabilen Protuberanz überwiegend dem Verlauf der Feldlinien in der (y,z)-Ebene folgen. Das gilt ebenfalls außerhalb des realisierten Parameterbereiches, solange $\beta < 2$ (d.h. nur offene Feldlinien) bleibt. Wenn geschlossene Feldlinien ($\beta > 2$) vorkommen, erhalten wir wiederum einen solchen Sachverhalt vor allem bei zweidimensionalen Verschiebungen ($k = 0$). Die Abb. 36 stellt $\hat{\xi}$ für eine solche Situation dar. Wegen $k = 0$ kann man die Ver-

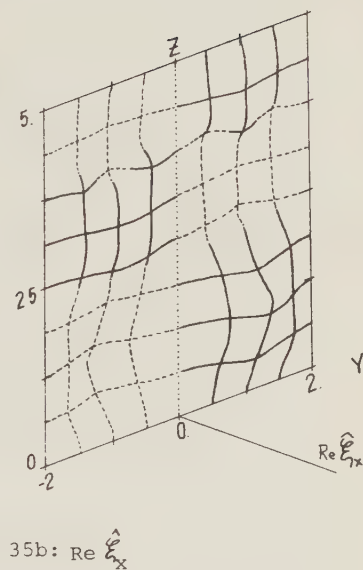
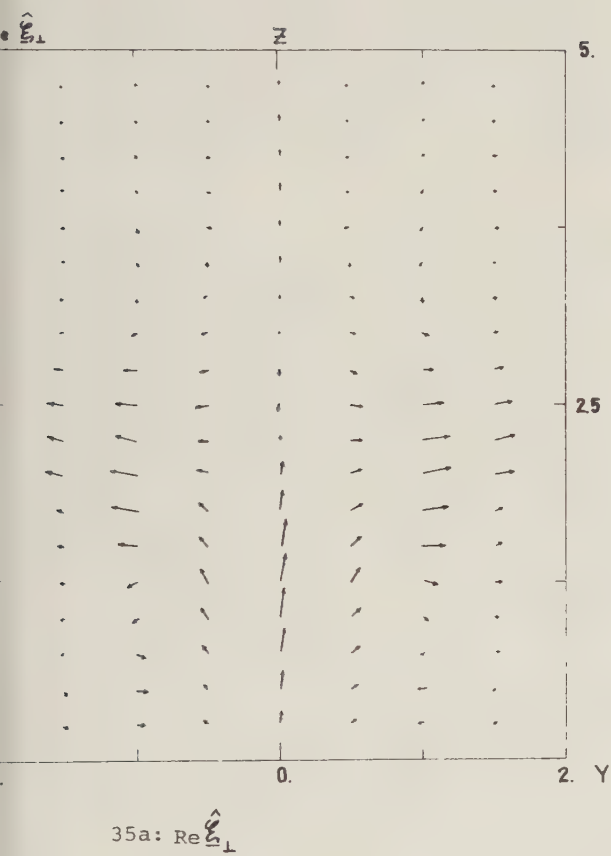
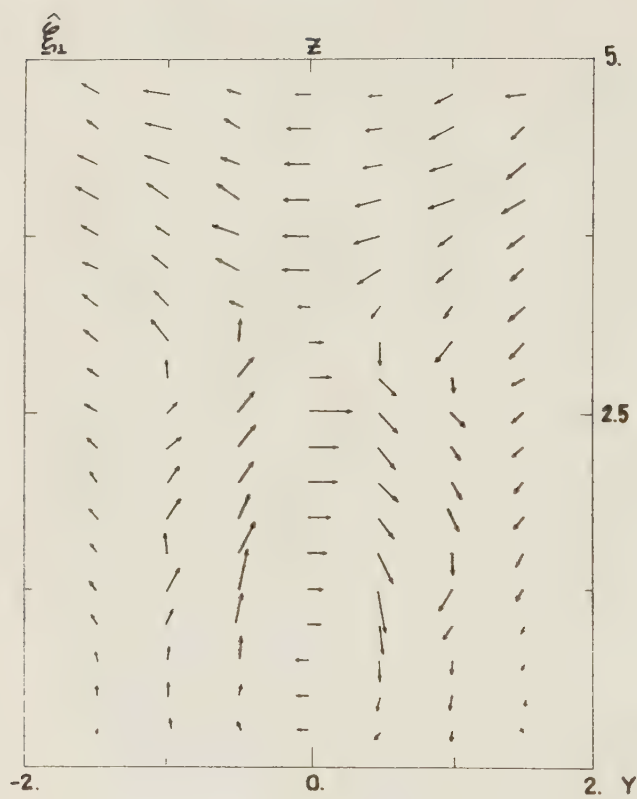
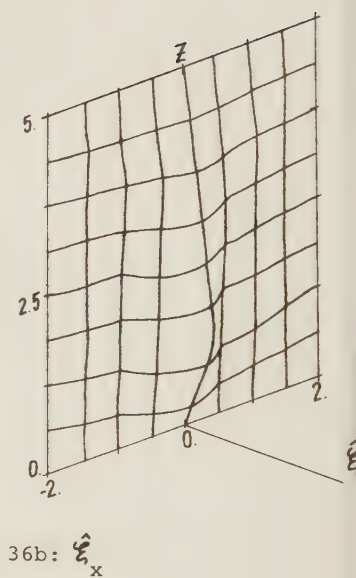


Abb. 35: Lerche-Low-Modell: Grundmode, $k = 10$, $Y = 4$, $\beta = 3$,
 $B_x = 0,1$; $\omega_{\min}^2 = 0,5985$.



36a: $\vec{v}_1$



36b: $\hat{\xi}_x$

Abb. 36: Lerche-Low-Modell: Grundmode, $k = 0$, $Y = 4$, $Z = 5$, $\beta = 3$,

$$B_x = 1; \omega_{\min}^2 = 0,0373.$$

schiebung als rein reell annehmen (s. Anhang C). Die Amplitude von $\hat{\xi}_1$ bleibt in der gesamten (y,z)-Ebene von derselben Größenordnung; die Amplitude von $\hat{\xi}_x$ um $y = 0$ ist wesentlich größer als anderswo, wobei $\hat{\xi}_x \text{ MAX}$ ungefähr bei (0, 1,25) erreicht wird. Die Amplitude von $\hat{\xi}_x$ ist erheblich größer als die der Komponente $\hat{\xi}_1$ ($|\hat{\xi}_x/\hat{\xi}_y| = 10,7$, $|\hat{\xi}_x/\hat{\xi}_z| = 37,5$).

Analog zu den vorigen Modellen wollen wir jetzt über die Form der Verschiebung im Fall $k = 0$ mit $B_x = 0$ diskutieren. Wie bereits erklärt wurde, hat man in diesem Fall die beiden Möglichkeiten i) und ii) für die allgemeinste Verschiebung. Für das Lerche-Low-Modell hat sich die folgende Situation ergeben: Bei festen Gebietsabmessungen $Y = 4$, $Z = 5$ hat die Verschiebung mit Komponenten nur auf der (y,z)-Ebene (Fall i)) die niedrigste Energie, solange $\beta \leq 0,4$ ist. Wird der Parameter $\beta > 0,4$, dann hat die Verschiebung mit Komponenten nur entlang der Protuberanzachse (Fall ii)) die niedrigste Energie. Wenn wir das Gebiet erweitern, erhalten wir dasselbe Verhalten, aber mit einem etwas größeren kritischen β -Wert; z.B., wenn $Y = Z = 10$, haben wir $\beta_c = 0,5$. Im Fall $k = 0$ mit $B_x = 0$ finden wir für alle β -Werte stets Stabilität (vgl. Absatz 1.3).

V. Diskussion und Schlußfolgerungen

Im vorangegangenen Kapitel haben wir mit Hilfe des MHD-Energieprinzips die Stabilitätseigenschaften von vier Protuberanzmodellen eingehend untersucht. Wir haben dabei nicht nur den für die Anwendung auf die Sonne relevanten Parameterbereich berücksichtigt, sondern auch andere Bereiche, in denen neue Phänomene auftreten, die für die Anwendung auf andere Sternatmosphären möglicherweise in Frage kommen könnten. Wir haben für die Modelle, bei denen eine periodische Konfiguration zugrundeliegt, zusätzlich die Stabilitätseigenschaften einer Doppelprotuberanz studiert. Wir konnten die gewonnenen Stabilitätsaussagen teilweise auf analytischem Weg erzielen. Andererseits haben wir anhand des von uns entwickelten numerischen Verfahrens die analytischen Aussagen bestätigt und auf allgemeine Verschiebungsklassen erweitert. Das Verfahren erlaubte uns außerdem, die verschiedenen Energiebeiträge zu den stabilen Wellen bzw. Instabilitäten zu untersuchen.

Wir werden jetzt die von uns gefundenen Stabilitätseigenschaften der einzelnen Modelle kurz zusammenfassen.

Im Fall des Kippenhahn-Schlüter-Modells ist es uns gelungen, seine Stabilität gegen beliebige dreidimensionale Verschiebungen analytisch zu beweisen. Das numerische Verfahren lieferte uns die Grundfrequenzen der stabilen Schwingungen sowie die zugehörigen Eigenmoden.

Für den in Protuberanzen realisierten Parameterbereich beschreibt dieses Modell horizontale Schwingungen senkrecht zur Protuberanzebene. Die Perioden (etwa 16 Min.) sowie die Polarisierung der

Schwingungen entsprechen relativ gut denen der beobachteten horizontalen Schwingungen in ruhenden Protuberanzen.

Die Grundfrequenz hängt auch relativ schwach von der Wellenzahl entlang der Protuberanzachse ab. Mit der Feldlinienneigung $r = B_z(\infty)/B_y$, die auch den maximalen Wert von $\sqrt{P_{\text{Plasma}}/P_{\text{Magnet}}}$ darstellt, variiert die Grundfrequenz auf verschiedene Weise. Während für kleine und große Neigungswinkel die Frequenz mit r zunimmt, weist sie bei mittleren Winkeln eine abnehmende Tendenz auf. Zum stabilen Verhalten des Gleichgewichtes tragen bis zu relativ großen Neigungswinkeln ($\sim 75^\circ$) und mittleren Wellenlängen ($k > 0,5$) besonders Gravitationseffekte bei. Im Bereich großer Wellenlängen leisten die elektromagnetischen Effekte, besonders bei großen Neigungswinkeln, den wesentlichen Beitrag. Die destabilisierende Wirkung auf das Gleichgewicht stammt, wenn überhaupt, hauptsächlich aus den elektromagnetischen Effekten. Im allgemeinen verhalten sich die Grundmoden der Schwingungen derart, daß die Flüssigkeitselemente in der (y,z) -Ebene überwiegend dem Verlauf der Feldlinien folgen.

Das Dungey-Modell ist, wie analytisch gezeigt wurde, stabil gegen zweidimensionale Verschiebungen, die entweder nur längs der Protuberanzachse oder in der (y,z) -Ebene verlaufen. Außerhalb des in Sonnenprotuberanzen realisierten Parameterbereiches kann dieses Modell gegen dreidimensionale Verschiebungen instabil werden.

Im dem in der Sonnenatmosphäre realisierten Parameterbereich zeigt das Modell ein stabiles Verhalten, wobei die Grundmoden vorwiegend eine horizontale Polarisierung mit teilweise starker Komponente in der Achsenrichtung aufweisen. Die von uns erhaltenen Schwingungsperioden (zwischen 55 und 80 Min.) für die Einzelprotuberanz liegen

ebenfalls im beobachteten Bereich der horizontalen Schwingungen, die ruhende Protuberanzen nach dem Einsatz großer Flares ausführen. Die Grundschwingungsperioden bei Doppelprotuberanzen sind entsprechend größer; Beobachtungen von Schwingungen in Doppelprotuberanzen liegen aber bis jetzt nicht vor.

Außerhalb des realisierten Parameterbereiches können Einzelprotuberanzen für ein relativ enges positives Intervall der Lage des Neutralpunktes z_0 instabil sein. Eine Absenkung von z_0 zu negativen Werten wirkt stark stabilisierend. Für die originale Version dieses Modells, d.h. $z_0 = 0$, erhalten wir stets Stabilität. Am instabilsten ist das Gleichgewicht im Zustand des niedrigsten Druckes, d.h. $\alpha = 1$. Die Erhöhung von α kann die Protuberanz stabilisieren, wobei dann die Grundfrequenz für noch größere α -Werte beinahe konstant ist. Weit vom instabilen Parameterbereich kann die Erhöhung von α eine destabilisierende Wirkung haben. Das Gleichgewicht schwingt mit maximaler Frequenz für Wellenlängen, die von der Größenordnung der Skalenhöhe sind. Doppelprotuberanzen weisen ähnliche Stabilitätseigenschaften wie Einzelprotuberanzen auf.

Die auftretende Instabilität wird stets durch elektromagnetische und in geringem Maße durch Graviationseffekte getrieben. Kompressionseffekte wirken stets stabilisierend. Wir finden die Destabilisierung konzentriert in Regionen, die vorwiegend geschlossene Feldlinien enthalten. Aufgrund der Polarisierung der Verschiebung sowie der k -Abhängigkeit der Anwachsrate liegt es nahe, die aufgetretene Instabilität als eine durch Gravitationseffekte verzerrte $m = 1$ kink-Instabilität zu bezeichnen. Bei stabilen Situationen schwingen die Flüssigkeitselemente vor allem in den höheren Regionen, wobei sie sich je nach Parametern entlang der Feldlinien oder teilweise in

horizontaler Richtung bewegen.

Das Menzel-Modell zeigt sich aufgrund einer analytischen Untersuchung stabil gegen zweidimensionale Verschiebungen entlang der Protuberanzachse. Dagegen kann Instabilität auftreten, wenn die zweidimensionale Verschiebung nur in der (y,z) -Ebene liegt. Im Fall dreidimensionaler Verschiebungen kann dieses Modell in breiten Parameterbereichen instabil werden.

Für den in Sonnenprotuberanzen realisierten Parameterbereich verhält sich die Einzelprotuberanz stabil, dabei schwingt sie mit einer Periode von etwa 40 Min. überwiegend in horizontaler Richtung senkrecht zur Protuberanzebene; wir finden daher gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Doppelprotuberanzen sind dagegen instabil in diesem Parameterbereich; die aufgetretene Instabilität kann jedoch die disparition brusque nicht erklären.

Außerhalb des für Protuberanzen relevanten Parameterbereiches können sowohl Einzelprotuberanzen als auch Doppelprotuberanzen im Rahmen dieses Modells instabil sein. Die erhaltene Instabilität ist bei jeder der beiden Protuberanzklassen durch unterschiedliche Mechanismen getrieben. Während Einzelprotuberanzen hauptsächlich als Folge elektromagnetischer Effekte instabil werden, sind Gravitationseffekte überwiegend verantwortlich für die Instabilität bei Doppelprotuberanzen (auch im sonnenrelevanten Parameterbereich). Einzelprotuberanzen sind vorwiegend nur bei relativ großen Werten des maximalen Verhältnisses $P_{\text{plasma}}/P_{\text{Magnet}}$ instabil. Instabilität kann dagegen sogar bei kleinen Werten dieses Verhältnisses in Doppelprotuberanzen auftreten. Im instabilsten ist die Einzelprotuberanz für kleine Wellenlängen entlang der Protuberanzachse.

Ferner kann eine Doppelprotuberanz für beliebig große Wellenlängen instabil werden. Die Vergrößerung der Skalenhöhe h ($h_0(q + 1)$) wirkt bei Einzelprotuberanzen stark stabilisierend. Die Instabilität entwickelt sich im Fall der Einzelprotuberanz im wesentlichen in der mittleren Region $-Y/2 \leq y \leq Y/2$ und über die gesamte Höhe. Der Verlauf der Feldlinien sowie die Orientierung des Massendichtegradienten deuten auf eine durch Krümmungseffekte erzeugte Austauschinstabilität. Andererseits entsteht die Instabilität bei Doppelprotuberanzen überwiegend um die Trennungslinie $y = 0$. Diese Instabilität zeigt Merkmale, die sowohl für eine krümmungsgetriebene Instabilität als auch für eine Rayleigh-Taylor-Instabilität charakteristisch sind.

Während des Instabilitätseinsatzes in der Einzelprotuberanz bewegen sich die Flüssigkeitselemente in der (y,z) -Ebene überwiegend in horizontaler Richtung. Bei Doppelprotuberanzen bewegen sie sich vorwiegend auf die Trennungslinie zu oder von ihr weg, wobei die Bewegung auf dieser Linie in vertikaler Richtung stattfindet. Bei Stabilität können die Flüssigkeitselemente für beide Protuberanzklassen in beiden Hauptrichtungen schwingen. Die Amplitude der Verschiebung ist für die meisten Fälle in beiden Klassen viel größer in höheren Regionen als in den unteren Regionen.

Das Lerche-Low-Modell ist nach unserer analytischen Untersuchung im Fall $B_x = 0$ stabil gegen zweidimensionale Verschiebungen, die sich nur auf die (y,z) -Ebene erstrecken. Gegen dreidimensionale Verschiebungen kann dieses Modell jedoch instabil werden.

Im Rahmen dieses Modells führt die Protuberanz für den realisierten Parameterbereich im wesentlichen horizontale stabile Schwin-

gungen senkrecht zur Protuberanzebene aus. Die von uns erhaltenen Perioden liegen zwischen 17 und 50 Min. Damit werden die Grundzüge der beobachteten Schwingungen in ruhenden Protuberanzen auch von diesem Modell relativ gut beschrieben.

Für den in Protuberanzen nicht realisierten Parameterbereich verhält sich dieses Modell zum Teil instabil. Während das Gleichgewicht für kleine und große Werte des typischen Verhältnisses $\beta = P_{\text{Plasma}} / 2P_{\text{Magnet}}$ stabil ist, kann Instabilität im mittleren β -Bereich auftreten. Diese Instabilität wird aber bereits durch ein relativ kleines Achsenfeld B_x unterdrückt. Eine weitere Zunahme von B_x wirkt stark stabilisierend. Das gilt besonders bei kleinen Wellenlängen in der Achsenrichtung. Wenn man Verschiebungen mit großen Wellenlängen betrachtet, kann die Erhöhung des Achsenfeldes B_x auch destabilisierend wirken. Die Instabilität tritt bei schwachen Achsenfeldern vor allem im Bereich kleiner Wellenlängen auf. Für große Achsenfelder ist die Protuberanz stabil und oszilliert mit wachsender Frequenz für abnehmende Wellenlängen.

Das Lerche-Low-Gleichgewicht wird instabil in starkem Maße durch die Wirkung elektromagnetischer Effekte; dazu kommt ein relativ schwacher destabilisierender Einfluß durch Gravitationseffekte. Mechanische Effekte im Plasma wirken grundsätzlich stabilisierend. Die aufgetretene Instabilität lokalisiert sich vorwiegend in der unteren Hälfte des Protuberanzgebietes, wo meistens geschlossene Feldlinien vorkommen. Aufgrund der beinahe horizontalen Polarisierung der Verschiebung in instabilen Situationen und des mit Pinch-konfigurationen konsistenten k -abhängigen Verlaufs der Anwachsrate folgern wir, daß die gefundene Instabilität eine durch Gravitations-

effekte verzerrte $m = 1$ kink-Instabilität ist. Die Stabilisierung durch das Achsenfeld ist ebenfalls konsistent mit dem Verhalten von screw-Pinchkonfigurationen.

Bei stabilen Protuberanzen schwingen die Flüssigkeitselemente in der (y,z) -Ebene im Fall kleiner β -Werte, d.h. nur offener Feldlinien, überwiegend längs der Feldlinien. Das gilt auch für $\beta > 2$ (offene und geschlossene Feldlinien) vor allem, wenn die Verschiebung zweidimensional ist.

Die Tabelle 10 faßt die wichtigsten Stabilitätseigenschaften der vier Protuberanzmodelle zusammen. Man sieht, daß alle vier Modelle im Fall einer Einzelprotuberanz im relevanten Parameterbereich der Sonnenatmosphäre stabil sind. In diesem Parameterbereich wird nur die Doppelprotuberanz im Rahmen des Menzel'schen Modells instabil. Die aufgetretene Instabilität scheint jedoch weder die Struktur noch die charakteristische Anwuchszeit zu besitzen, um die Beobachtungen zu erklären. Das spektakuläre Ende einer ruhenden Protuberanz, d.h. die disparition brusque, kann daher von den untersuchten Modellen nicht beschrieben werden. Dieses Resultat scheint uns konsistent mit dem Ergebnis anderer Autoren, nach dem resistive Instabilitäten für die disparition brusque verantwortlich sein können (s. z.B. Spicer, 1978; Sakai und Nishikawa, 1983).

Die von uns untersuchten isothermen Modelle können die beobachteten horizontalen Schwingungen in ruhenden Einzelprotuberanzen befriedigend erklären. Dagegen scheint die Beschreibung von Doppelprotuberanzen durch eine solche Art statischer Gleichgewichte nur unter Vorbehalt möglich. Dieses kann möglicherweise an der starken Wechselwirkung zwischen beiden Komponenten liegen (s. z.B.

Tabelle 10: Zusammenstellung der Stabilitätseigenschaften von MHD-Modellen ruhender Protuberanzen

Modell	aus dem MHD-Energieprinzip gewonnene Stabilitätsaussagen			Modellparameter
	analytisch	numerisch		
		in ruhenden Sonnenprotuberanzen realisierter Parameterbereich	andere Parameter, soweit untersucht	
Kippenhahn-Schlüter	stabil für alle 3D-Verschiebungen	stabil, horizontale Schwingun- gen senkrecht zur Protuberanz- ebene Periode ~ 16 Min	stabil	$B_z(\infty)$ $r = \frac{B_z}{B_y}, B_x = 0$ B_x : Achsenfeld
Dungey	stabil für 2D-Ver- schiebungen $k = 0: \hat{e}_x \equiv 0, \hat{e}_y \neq 0$ bzw. $\hat{e}_x \neq 0, \hat{e}_y \equiv 0$	Einzelprotuberanz: stabil, horiz. Schwing., fast entlang der Proth.-Achse, Periode $\sim$ 55 - 80 Min. Doppelprotuberanz: stabil, ho- riz. Schwing., Periode $>$ als bei Einzelprot.	Einzelprotuberanz: z.T. instabil Doppelprotuberanz: z.T. instabil	α, z_0, B_x $\alpha > 1$ damit $p > 0$ alle (y, z) z_0 : Neutralpkt.-Lage
Menzel	stabil für 2D-Ver- schiebungen $k = 0: \hat{e}_x \neq 0,$ $\hat{e}_y \equiv 0$	Einzelprotuberanz: stabil, ho- riz. Schwing., senkr. zur Prot.- Ebene, Periode ~ 40 Min. Doppelprotuberanz: instabil, Anwachszeit $\sim 25 - 42$ Min.	Einzelprotuberanz: z.T. instabil Doppelprotuberanz: z.T. instabil	r, q, B_x $r = \frac{P_{\text{Plasma}}}{P_{\text{Magnet}}} _{y=0} = q \cdot (h/h_0)^{-1}$ h : Skalenhöhe, $h_0 = h(B=0)$
Lerche-Low	stabil für 2D-Ver- schiebungen $B_x=0, k=0: \hat{e}_x \neq 0, \hat{e}_y \equiv 0$	stabil, horizontale Schwin- gungen senkrecht zur Protube- ranzebene, Periode $\sim 17 - 50$ Min.	z.T. instabil	β, B_x $\beta = \frac{P_{\text{Plasma}}}{2P_{\text{Magnet}}}$ typisch B_x = konstant

Tandberg-Hanssen, 1974; Grossi Gallegos und Machado, 1973), so daß die Doppelprotuberanzen vielleicht eher den aktiven Protuberanzklassen zuzuordnen sind.

Außerhalb des für ruhende Sonnenprotuberanzen realisierten Parameterbereiches erhalten wir Instabilität bei den drei zweidimensionalen Modellen. Das eindimensionale Modell von Kippenhahn und Schlüter zeichnet sich besonders dadurch aus, daß der gesamte Druck $P + \frac{B^2}{8\pi}$ konstant ist. Die anderen Modelle weisen dagegen einen ortsabhängigen gesamten Druck auf, was vermutlich der Grund ist, warum der einfache Stabilitätsbeweis dieses Modells auf andere komplizierte Modelle nicht übertragbar ist (s. Galindo und Schindler, 1984). Dieses breit akzeptierte Protuberanzmodell war oft Ziel umfangreicher Stabilitätsuntersuchungen (s. Kapitel I), jedoch wurden dabei stark einschränkende Annahmen benutzt. Unser Stabilitätsbeweis für beliebige dreidimensionale Verschiebungen gilt ebenfalls für eine größere Schichtgleichgewichtsklasse, wobei einige ihrer Elemente möglicherweise ebenfalls für Protuberanzen relevant sein können.

Die von uns gefundenen Instabilitäten liegen, wie die Tabelle 10 zeigt, außerhalb des relevanten Parameterbereiches ruhender Protuberanzen. Aufgrund der Komplexität der betreffenden Gleichgewichtskonfigurationen ist es relativ schwierig, anhand eines Vergleichs mit nur zum Teil ähnlichen vereinfachten Konfigurationen zu einer eindeutigen Zuordnung der Instabilitäten zu gelangen. Deshalb haben wir uns vorwiegend auf eine ausführliche Beschreibung der jeweiligen Instabilitäten beschränkt. Andererseits weisen die erhaltenen Instabilitäten charakteristische Merkmale verschiedener (meistens sogar gleichzeitig) bereits bekannter ideal-MHD-Instabilitäts-

klassen auf. Protuberanzgleichgewichte, die geschlossene konzentrische Feldlinien enthalten, verhalten sich bei instabilen Situationen überwiegend wie instabile Pinchgleichgewichte. Das Gravitationsfeld spielt in instabilen Situationen nur selten eine entscheidende Rolle. Die Anwachsrate der gefundenen Instabilitäten sind von der Größenordnung $\mathcal{V}_A/L$, wobei $\mathcal{V}_A$ die typische Alfvén-Geschwindigkeit in der Protuberanz und L eine charakteristische Länge (z.B. Y bzw. Z) ist.

Bei Abwesenheit eines Achsenfeldes ist die Stabilität gegen zweidimensionale Verschiebungen, die entlang der Protuberanzachse gerichtet sind, eine gemeinsame Eigenschaft aller vier untersuchten Modelle. Erst der Einsatz dreidimensionaler Verschiebungen kann zwei der Modelle (Dungey und Lerche-Low) instabil machen. Wir haben im Fall zweidimensionaler Verschiebungen ($k = 0$) ohne Achsenfeld ($B_x = 0$) die kritischen Werte der Gleichgewichtsparameter in jedem Modell gefunden, welche die Struktur der minimisierenden Eigenmode bestimmen (d.h. Komponente nur entlang der Protuberanzachse oder nur senkrecht dazu, s. Anhang C).

Keines der untersuchten Modelle berücksichtigt das dipolartige Magnetfeld, welches die Protuberanz mit dem photosphärischen Magnetfeld verbindet. Der Anschluß der betrachteten Modellmagnetfelder an dieses in seinen Fußpunkten verankerte, aber auch leicht biegsame, stark vertikale Magnetfeld kann möglicherweise einen destabilisierenden Einfluß auf die Protuberanz haben. Neuere Modelle (z.B. Low, 1981) betrachten bereits ein solches Verbindungsmagnetfeld.

Die erzielten Stabilitätsaussagen gelten natürlich nur im Rahmen der Gültigkeit der Gleichgewichtsmodelle, so daß insbesondere Stö-

rungen mit Längenskalenvergleichbar mit der Dicke der Protuberanz gut beschrieben werden. Die betrachteten isothermen Modelle erklären in diesem Gebiet relativ gut die Grundzüge der Protuberanz.

In dieser Arbeit erzielen wir die erste vollständige Stabilitätsanalyse zweidimensionaler Protuberanzmodelle mit Hilfe unseres Verfahrens, das die Gleichgewichtsmodelle in einheitlicher Form behandelt. Die untersuchten Modelle stellen daher lediglich eine erste mögliche Anwendung des Verfahrens dar. Dieses erlaubt ebenfalls die Bestimmung von Stabilitätseigenschaften noch breiterer Modellklassen (z.B. nicht isotherme Gleichgewichte, ortsabhängiges Achsenfeld B_x , dipolartiges Magnetfeld in der Umgebung, usw.) und damit die Untersuchung realistischer zweidimensionaler Modelle für ruhende Protuberanzen.

Darüberhinaus beschränkt sich der Anwendungsbereich unseres Verfahrens zur Stabilitätsuntersuchung, wie anhand der untersuchten Testgleichgewichte im Anhang B gezeigt wird, nicht nur auf Protuberanzgleichgewichte, sondern umfaßt vielmehr beliebige ein- und zweidimensionale statische Gleichgewichte im Rahmen der idealen MHD.

Anhang A: Das numerische Verfahren

Die numerische Behandlung besteht im wesentlichen aus der Minimierung des Funktional δW in Bezug auf allgemeine Verschiebungen $\underline{\xi}$. Wir benutzen dafür die Methode der finiten Elemente, die hauptsächlich eine modifizierte Art des klassischen Ritz'schen Verfahrens ist (s. z.B. Zienkiewicz, 1977). Diese Methode zeichnet sich besonders durch ihre Flexibilität bei inhomogenen Situationen sowie durch ihre relativ hohe Genauigkeit aus.

Als Ausgangspunkt diskretisiert man das Grundgebiet G in einzelne Teilgebiete (Elemente). Hier haben wir das rechteckige Grundgebiet $\{-Y/2 \leq y \leq Y/2, 0 \leq z \leq Z\}$ in m Dreiecke G_i unterteilt. Auf jedem Element wird die zu variierende Funktion, in unserem Fall die Verschiebung $\underline{\xi}$, durch einen geeigneten Ansatz approximiert. Die Form eines solchen Ansatzes hängt in erster Linie von der Geometrie der ausgewählten Elemente sowie von den Stetigkeitsforderungen an die approximierenden Funktionen $\underline{\xi}^{(i)}$ beim Übergang von einem Element in ein benachbartes ab. Für jedes Element definiert man die sogenannten Knotenpunkte, so daß $\underline{\xi}^{(i)}$ innerhalb des i -ten Elementes als Linearkombination der sogenannten Formfunktionen darzustellen ist; die Koeffizienten sind durch die Werte von $\underline{\xi}^{(i)}$ in den Knotenpunkten $\underline{\xi}_s^{(i)}$ (Knotenvariablen) gegeben. Wir definieren hier als Knotenpunkte die Ecken und die Seitenmitten im Dreieck. Wir machen daher den folgenden Ansatz für $\underline{\xi}^{(i)}$:

$$\underline{\xi}^{(i)}(y,z) = \sum_{s=1}^6 f_s^{(i)}(y,z) \underline{\xi}_s^{(i)} \quad (A.1)$$

Dabei sind die $f_s^{(i)}(y,z)$ Formfunktionen, welche im s -ten Knotenpunkt den Wert 1 haben und in den anderen Knotenpunkten verschwinden. Hier haben wir für $f_s^{(i)}(y,z)$ ein quadratisches Polynom in den

Ortskoordinaten y, z angenommen, wobei die Koeffizienten der einzelnen Terme im Polynom nur von den Knotenpunktkoordinaten abhängen. Damit ist die Stetigkeit von $\xi^{(i)}$ auf den Elementrändern gesichert.

Wenn wir den Ansatz (A.1) in das Funktional δW (II.34) einsetzen und außerdem die Normierungsbedingung für ξ in (II.31) berücksichtigen, bekommen wir nach der Zusammensetzung aller Elemente im Grundgebiet eine quadratische Form in den $\xi_s^{(i)}$. Wir suchen das Minimum dieses Ausdrucks und erhalten das folgende Matrixeigenwertproblem:

$$A X = \lambda B X \quad (A.2)$$

Dabei sind A und B symmetrische Matrizen und B ist zusätzlich positiv definit; der Vektor X besteht aus den Werten ξ_r für alle die Knoten, die neu numeriert wurden. Zur Berechnung der beiden Matrizen muß man zahlreiche Flächenintegrationen über die einzelnen Elemente durchführen. Bei diesen Integrationen haben wir verschiedene Gauß'sche Quadraturformeln verwendet, welche praktisch eine beliebig hohe Integrationsgenauigkeit erlauben.

Wir haben in (A.2) eine approximierte Formulierung des Variationsproblems (II.31); je mehr Elemente bei der Aufteilung des Grundgebietes benutzt werden, desto kleiner ist die Differenz zwischen dem tiefsten Eigenwert λ_1 und dem gesuchten Minimum von δW . Entsprechend können wir mit Hilfe des Eigenvektors X_1 die minimisierende Mode im ganzen Grundgebiet (stückweise durch (A.1)) approximieren. Höhere Eigenwerte im Spektrum zeigen als Folge der Diskretisierung einen mit ihrer Ordnung zunehmenden relativen Fehler.

Die von uns angewandte Methode der finiten Elemente hat den wichtigen Vorteil, daß sich die Dirichlet'schen Randbedingungen (II.27) auf natürliche Weise befriedigen lassen. Ferner kann man durch eine sinnvolle Unterteilung des Grundgebietes eine zunehmend gute Auflösung erzielen, indem man in einer bestimmten Region das Netz der Knotenpunkte enger wählt.

Die Lösung des Eigenwertproblems (A.2) kann durch geeignete numerische Methoden (s. z.B. Schwarz, 1980) relativ einfach gewonnen werden.

Wenn man die Methode der finiten Elemente mit unterschiedlichen Diskretisierungsnetzen auf ein festes Grundgebiet anwendet, erhält man einen monoton konvergenten Verlauf von λ_1 mit zunehmender Zahl der Elemente im Netz. Jedoch ist dies nur dann gewährleistet, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt werden:

- Der von den Formfunktionen aufgespannte Funktionenraum für ein bestimmtes Diskretisierungsnetz mit n Elementen muß gleichzeitig Unterraum des Funktionenraumes sein, welcher von den Formfunktionen eines anderen Diskretisierungsnetzes mit $m > n$ Elementen aufgespannt wird; d.h. die Netze müssen ineinandergeschachtelt sein.
- Die auszuführenden Flächenintegrationen über die Elemente müssen hinreichend genau sein; dies wird am einfachsten erzielt, indem man genügend viele Integrationsstützpunkte innerhalb jedes Elements bei den Gauß'schen Quadraturformeln berücksichtigt.

Anhang B: Tests zum numerischen Verfahren

Die Implementierung des im Anhang A skizzierten numerischen Verfahrens hat zu einem umfangreichen Computerprogramm geführt. Bevor man das entwickelte Programm auf die Protuberanzgleichgewichte anwendet, ist es notwendig, eingehende Tests des Programms durchzuführen. Dafür eignen sich besonders solche Fälle, in denen das Spektrum auf einem zweiten unabhängigen Wege ermittelt werden kann. Wir behandeln MHD-Wellen, die ebene Plasmaschicht und Schallwellen im Gravitationsfeld. Diese Fälle dienen gleichzeitig der Illustration des numerischen Verfahrens.

B.1 MHD-Wellen im homogenen Plasma

Wir betrachten ein homogenes Plasma innerhalb des rechteckigen Gebiets $\{-Y/2 \leq y \leq Y/2, 0 \leq z \leq Z\}$ mit einem homogenen horizontalen Magnetfeld $\underline{B}_0 = B_0 \underline{e}_y$. Wir interessieren uns zunächst für die Situation, in der das Gleichgewicht vom Magnetfeld überwiegend bestimmt wird (kaltes Plasma). Wir können daher in der Bewegungsgleichung (II.16) den ersten Term von $\underline{F}(\underline{\xi})$ sowie wegen der Abwesenheit eines Gravitationsfeldes auch den letzten Term vernachlässigen. Wir bekommen sofort die folgende Wellengleichung:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \nabla \times [\nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}_0)] \right\} \times \underline{B}_0. \quad (\text{B.1})$$

Wenn wir die folgende Form der Verschiebung $\underline{\xi}$ annehmen:

$$\underline{\xi}(x, y, z, t) = (\hat{\xi}_x(y, z), \hat{\xi}_y(y, z), \hat{\xi}_z(y, z)) e^{ikx + i\omega t} \quad (\text{B.2})$$

folgt $\hat{\xi}_y \equiv 0$, d.h. $\underline{\xi} \cdot \underline{B}_0 = 0$. Wir machen noch die zusätzliche Vereinfachung $k = 0$ (zweidimensionale Schwingungen), so daß eine Entkopplung der beiden übrigen Gleichungen in (B.1) zustande kommt:

$$-\omega^2 \hat{\xi}_x = v_A^2 \frac{\partial^2 \hat{\xi}_x}{\partial y^2} \quad (B.3)$$

$$-\omega^2 \hat{\xi}_z = v_A^2 \left(\frac{\partial^2 \hat{\xi}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}_z}{\partial z^2} \right) \quad (B.4)$$

Dabei ist $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi \rho_0}$ die Alfvén-Geschwindigkeit. Offensichtlich handelt es sich bei (B.3) um Alfvén-Wellen und bei (B.4) um die schnelle magneto-akustische Welle (die langsame magneto-akustische Welle entfällt im kalten Grenzfall). Wir suchen Lösungen von (B.3) und (B.4), die den Dirichlet'schen Randbedingungen $\hat{\xi}_x|_{\text{Rand}} = \hat{\xi}_z|_{\text{Rand}} = 0$ genügen, d.h. wir suchen nach stehenden Wellen. Wir können die Kompressibilität der Verschiebung $\hat{\xi}$ zur Fallunterscheidung benutzen:

a) Wenn wir Inkompressibilität annehmen, erhalten wir für die obige Situation $\partial \hat{\xi}_z / \partial z = 0$. Die geforderten Randbedingungen liefern daher $\hat{\xi}_z = 0$ für das ganze Gebiet. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen erhalten wir als Lösung der Gleichung (B.3):

$$\hat{\xi}_x(y, z) = A \cos k_y y \cdot \sin k_z z \quad (B.5)$$

wobei $k_y = \frac{\pi}{Y} l$, $l = 1, 3, 5, \dots$, $k_z = \frac{\pi}{Z} m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ und A eine Konstante ist. Die zugehörige Dispersionsrelation lautet:

$$\omega^2 = k_y^2 v_A^2 \quad (B.6)$$

Eine zweite Lösung, die bei $y = 0$ verschwindet, ist durch

$$\hat{\xi}_x(y, z) = B \sin k'_y y \cdot \sin k_z z \quad (B.7)$$

gegeben. Dabei ist $k'_y = \frac{2\pi}{Y} l$, $l = 1, 2, 3, \dots$ und B eine Konstante.

Wir haben diesmal die folgende Dispersionsrelation:

$$\omega^2 = k_y'^2 v_A^2 \quad (B.8)$$

Die Wellenfortpflanzung findet für beide Lösungen in der (y,z) -Ebene statt, wobei sich die Amplitude senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ändert. Diese transversale Alfvén-Welle verursacht keine Änderung in der Dichte und dem Druck.

b) Wenn man kompressible Verschiebungen mit $\xi_x = 0$ berücksichtigt, erhalten wir die folgende Lösung der Gleichung (B.4):

$$\hat{\xi}_z(y,z) = C \cos k_y y \cdot \sin k_z z \quad (\text{B.9})$$

Dabei ist C eine Konstante. Diese Lösung führt zu der Dispersionsrelation:

$$\omega^2 = (k_y^2 + k_z^2) v_A^2 \quad (\text{B.10})$$

Die komplementäre Lösung, die bei $y = 0$ verschwindet, ist wieder:

$$\hat{\xi}_z(y,z) = D \sin k'_y y \cdot \sin k_z z \quad (\text{B.11})$$

wobei D eine Konstante ist. Wir bekommen dadurch die Dispersionsrelation:

$$\omega^2 = (k'^2_y + k_z^2) v_A^2 \quad (\text{B.12})$$

Diese Kompressionswelle hat sowohl einen longitudinalen als auch einen transversalen Charakter; sie verursacht im allgemeinen Änderungen in der Dichte und dem Druck.

Wir werden jetzt das oben gezeigte Verhalten mit den durch die numerische Auswertung des Energieprinzips gewonnenen Resultaten vergleichen. Wir teilen das oben definierte Gebiet in $M = 2 \cdot K \cdot L$ Dreiecke auf, wobei K die Zahl der viereckigen Teilelemente in horizontaler Richtung und L in vertikaler Richtung ist (s. Abb. B.1a für den Fall $K = 2, L = 5$). Wir bekommen dadurch

$N = (2 \cdot K - 1)(2 \cdot L - 1)$ Innen- und $J = 4(K + L)$ Rand-Knotenpunkte. Durch die Änderung der Zahlen K und L kann man die Auflösung in beiden Richtungen variieren. Für die hier betrachteten zweidimensionalen Verschiebungen haben wir drei Unbekannte pro Innenknotenpunkt.

Wir benutzen, um den Vergleich beider Untersuchungsmethoden zu ermöglichen, eine gemeinsame Normierung aller Größen:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{r}}{h}; \quad \tilde{\xi} = \frac{\tilde{\xi}}{h}; \quad \tilde{A} = \frac{\tilde{A}}{B_0 h}; \quad \tilde{B} = \frac{\tilde{B}}{B_0}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}; \quad k = h \tilde{k}; \quad \delta W = \frac{4\pi \delta \tilde{W}}{B_0^2 h^4}; \quad \omega^2 = \frac{h^2 \tilde{\omega}^2}{v_A^2} \quad (\text{B.13})$$

Dabei sind ρ_0 und h positive Konstanten. Die Größen mit Schlange bezeichnen dimensionsbehaftete Variable, so daß alle Größen ohne Schlange dimensionslos sind.

Wir nehmen exemplarisch das Gebiet mit $Y = 2,5$ und $Z = 10$, so daß wir die folgenden Ausdrücke für das Eigenwertspektrum der beiden behandelten Fälle a) und b) erhalten:

$$\omega_{an}^2 = 0.16 \pi^2 n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.14})$$

$$\omega_{bn,m}^2 = 0.01 \pi^2 (m^2 + 16 n^2), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.15})$$

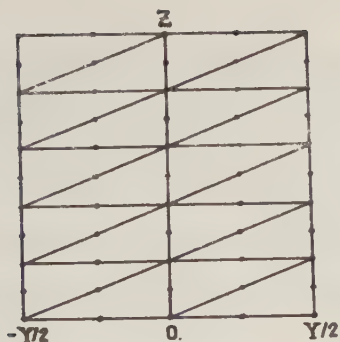
Die tiefsten Eigenwerte werden offensichtlich mit $n = m = 1$ erreicht. Die höheren Eigenwerte $\omega_{bm,n}^2$ können leicht durch Tabellierung von $m^2 + 16 n^2$ bestimmt werden. Wir haben unser Programm auf beide Fälle angewandt. Die Tabelle B.1 zeigt neben den benutzten Netzen (durch K und L definiert) die erzielten tiefsten Eigenwerte sowie die prozentuale Abweichung Δ vom analytischen Wert: $\omega_{a1}^2 = 1,5791$ und $\omega_{b1,1}^2 = 1,6778$. Die Abweichungen liegen für K oder L größer 2 unter 2 %. Für höhere Eigenwerte erhalten wir, wie erwartet, eine mit

Tabelle B.1: Alfvén-Wellen: Numerischer tiefster Eigenwert bei unterschiedlich guter Auflösung des Grundgebietes durch dreieckige Elemente und ihre Abweichung vom analytischen Wert, $\omega_{a1}^2 = 1,5791$, $\omega_{b1}^2 = 1,6778$, $Y = 2,5$, $Z = 10$.

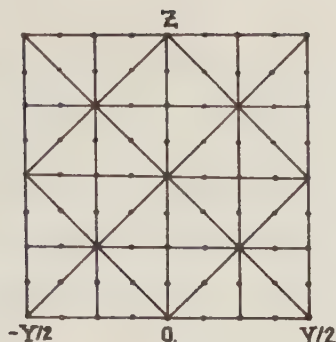
K	L	M	ω_{a1}^2	$\Delta(\%)$	$\omega_{b1,1}^2$	$\Delta(\%)$
2	2	8	1,6308	3,0	1,7432	3,8
3	2	12	1,6006	1,3	1,7110	1,9
4	2	16	1,5909	0,8	1,7007	1,3
5	2	20	1,5866	0,4	1,6961	1,0
2	3	12	1,6073	1,7	1,7133	2,0
2	4	16	1,5992	1,2	1,7033	1,5
2	5	20	1,5955	0,9	1,6987	1,23
8	1	16	1,9802	20	2,0809	20
1	10	20	1,6065	1,7	1,7302	3,0

ihrer Ordnung wachsender Abweichung vom analytischen Wert.

Das bisher benutzte Netzsystem hat offensichtlich den Vorteil, daß es bei strukturierteren Gleichgewichten die Auflösung in geeigneter Form steuern läßt. Andererseits hat es jedoch einige Nachteile, die wir später in diesem Kapitel finden werden. Wir diskutieren daher ein weiteres Netzsystem. Dieses besteht aus in sich geschachtelten dreieckigen Elementen derart, daß der für ein bestimmtes Netz vom Satz der Formfunktionen aufgespannte Funktionsraum in dem durch Verfeinerung des Netzes entstehenden Funktionsraum immer enthalten ist. Die Abb. B.1b zeigt ein solches Netz für 32 Elemente. Diese Auflösung ist vom Rechenzeit-Aufwand her die für uns maximal realisierbare.



B.1a: $K = 2$, $L = 5$,
20 Elemente.



B.1b: In sich geschachteltes
Netz mit 32 Elementen.

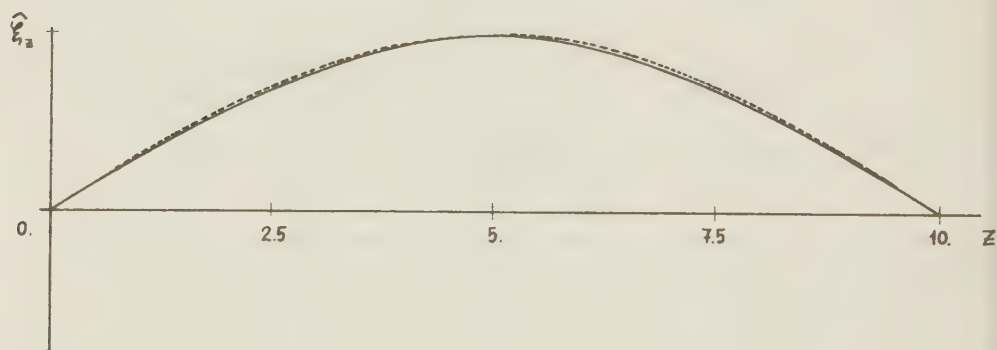
Abb. B.1: Zerlegung des Grundgebietes in dreieckige Elemente.

Die Tabelle B.2 zeigt die drei tiefsten Eigenwerte beider Spektren sowie ihre Abweichung vom analytischen Wert bei der Anwendung des in der Abb. B.1b dargestellten Netzes. Wir können daher den tiefsten Eigenwert der betrachteten Gleichgewichtskonfiguration ziemlich gut approximieren, was in erster Linie für die Stabilitätsuntersuchung entscheidend ist.

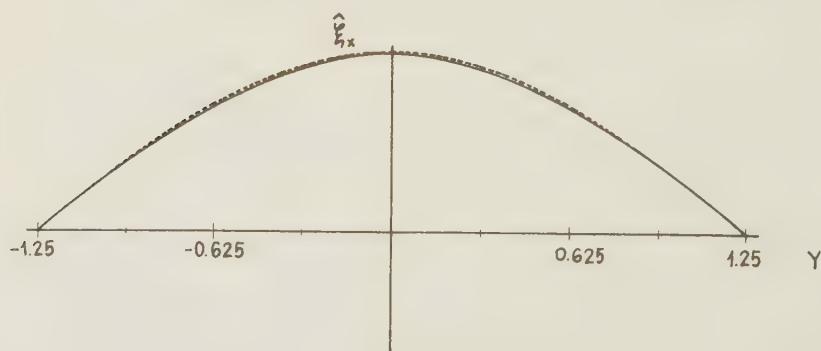
Tabelle B.2: Alfvén-Wellen: Die drei tiefsten Eigenwerte bei Anwendung eines in sich geschachtelten Netzes mit 32 Elementen, $Y = 2,5$, $Z = 10$.

ω_{ai}^2	n	$\omega_{an}^2 = 0,16\pi^2 n^2$	ω_{ai}^2 Numerisch	$\Delta(\%)$	ω_{bi}^2	n	m	$\omega_{bm,n}^2 = 0,01\pi^2 (m^2 + 16n^2)$	ω_{bi}^2 Num.	$\Delta(\%)$
ω_{a1}^2	1	1,5791	1,5820	0,18	ω_{b1}^2	1	1	1,6778	1,6825	0,28
ω_{a2}^2	2	6,3165	6,4870	2,6	ω_{b2}^2	1	2	1,9739	2,0040	1,5
ω_{a3}^2	3	14,2122	16,1974	12,6	ω_{b3}^2	1	3	2,4674	2,5920	5,0

Das angewandte numerische Verfahren liefert ebenfalls die zugehörigen Eigenmoden. Wir finden analytisch einen Satz periodischer Eigenmoden, die sich nach ihrer Nullstellenzahl einordnen lassen. Die numerischen Eigenmoden weisen ebenfalls diese Eigenschaft auf. In Abb. B2 werden exemplarisch die minimisierenden Eigenmoden für beide Verfahren verglichen. Wir erzielen offensichtlich auch eine ziem-



B.2a: Kompressible Eigenmode bei $y = 0$.



B.2b: Inkompressible Eigenmode bei $z = 5$.

Abb. B.2: Alfvén-Wellen: Minimisierende Eigenmoden:

— numerisch, ---- analytisch.

lich gute Approximation der Eigenmoden niedrigster Ordnung. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir, daß wir auch zusätzlich Plasmadruckeffekte im Gleichgewicht (warmes Plasma) betrachtet haben. Wir erhielten wieder inkompressible Alfvén-Wellen und die magnetoakustischen Wellen. Unser numerisches Verfahren approximierte auch relativ gut die tiefsten Eigenwerte der drei Spektren, wobei ihre minimalsten Abweichungen $\Delta(\text{Alfvén}) \approx 0,1 \%$, $\Delta(\text{magnet.akus.schnell}) \approx 0,5 \%$ und $\Delta(\text{magnet.akus.langsam}) \approx 11 \%$ (bei der Benutzung des in Abb. B.1b gezeigten Diskretisierungsnetzes) betrugen. Wir haben ebenfalls die zugehörigen Eigenmoden für beide Methoden verglichen. Wir erhielten gute Übereinstimmung im Fall der Alfvén-Wellen. Andererseits war das Verhalten der beiden Komponenten $(\hat{\xi}_y, \hat{\xi}_z)$ der Eigenmoden im Fall der magnetoakustischen Wellen unterschiedlich. Während sich nämlich für die Komponente entlang des Magnetfeldes die gleichen Randbedingungen in beiden Verfahren befriedigen lassen, kann die Komponente senkrecht zur Feldrichtung bei der Normalmoden-Analyse den Dirichlet'schen Randbedingungen nicht genügen. Unser numerisches Verfahren beschrieb daher die parallele Komponente sehr gut. Die senkrechte Komponente wurde außerhalb einer schmalen Randregion auch gut beschrieben; nur in der Nähe des Randes erhielten wir relativ große Abweichung zwischen beiden Eigenmoden. Diese Komponente wies ein typisches Grenzschichtverhalten auf.

B.2 Plasmaschicht-Gleichgewicht

Als zweiten Test unseres numerischen Verfahrens wollen wir jetzt eine nicht-homogene Situation untersuchen. Ausgangspunkt ist die Betrachtung eines Neutralschicht-Gleichgewichtes, das durch die folgenden Größen definiert ist (Harris, 1962):

$$\underline{B}_0 = \hat{B}_0 \tanh\left(\frac{z - \frac{Z}{2}}{h}\right) \underline{e}_x \quad (\text{B.16})$$

$$P_0 = \frac{\hat{B}_0^2}{8\pi \cosh^2\left(\frac{z - \frac{Z}{2}}{h}\right)} \quad (\text{B.17})$$

$$\hat{S}_0 = \frac{\hat{S}_0}{\cosh^2\left(\frac{z - \frac{Z}{2}}{h}\right)} \quad (\text{B.18})$$

Dabei sind $\hat{B}_0$, $\hat{S}_0$ und h charakteristische, konstante Größen. Es ist außerdem kein Magnetfeld in der (y, z) -Ebene sowie kein Gravitationsfeld vorhanden. Goedbloed und Dagazian (1971) haben bereits gezeigt, daß ebene eindimensionale Gleichgewichte im Rahmen der idealen MHD stabil sind. Wir wollen zunächst mit Hilfe der Normalmoden-Analyse das stabile Verhalten der Harris-Schicht untersuchen. Als zusätzliche Vereinfachung betrachten wir Verschiebungen mit $\xi_y = 0$. Wenn wir die Form (B.2) für ξ annehmen, erhalten wir sofort aus (II.16):

$$\hat{\xi}_x (\gamma k^2 P_0 - \hat{S}_0 \omega^2) = i k \gamma P_0 \hat{\xi}_z' \quad (\text{B.19})$$

$$-\left(\frac{B_0^2}{4\pi} + \gamma P_0\right) \hat{\xi}_z'' + \left(\frac{\gamma}{2} - 1\right) \frac{B_0 B_0'}{2\pi} \hat{\xi}_z' + \left(\frac{k^2 B_0^2}{4\pi} - \hat{S}_0 \omega^2\right) \hat{\xi}_z = i k \gamma P_0 \hat{\xi}_x' - i k \gamma \frac{B_0 B_0'}{4\pi} \hat{\xi}_x \quad (\text{B.20})$$

wobei der Strich Ableitung nach z bedeutet. Zu einem leichteren Überblick und für den späteren Vergleich zwischen beiden Verfahren führen wir jetzt die folgende Normierung ein:

$$\underline{r} = \frac{\tilde{r}}{h}; \quad \underline{\xi} = \frac{\tilde{\xi}}{h}; \quad A = \frac{\tilde{A}}{B_0 h}, \quad B = \frac{\tilde{B}}{B_0}, \quad P = \frac{8\pi \tilde{P}}{B_0^2}, \quad \hat{S} = \frac{\tilde{S}}{\hat{S}_0}, \quad k = h \tilde{k}; \quad \delta W = \frac{4\pi \delta \tilde{W}}{h^3 \hat{B}_0^2}, \quad \omega^2 = \frac{4\pi \hat{S}_0 h^2 \tilde{\omega}^2}{\hat{B}_0^2} \quad (\text{B.21})$$

Somit sind die Größen ohne Schlange ab jetzt für diesen Absatz dimensionslos. Wenn wir $\hat{\xi}_x$ und $\hat{\xi}_x'$ aus (B.19) in (B.20) einsetzen, bekommen wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\hat{\xi}_z$:

$$\left\{ \frac{\beta - \sinh^2(z - \frac{Z}{2})}{\cosh^2(z - \frac{Z}{2})} \right\} \hat{\xi}_z'' + \left\{ -\frac{\gamma \sinh(z - \frac{Z}{2})}{\cosh^3(z - \frac{Z}{2})} (1 + \beta) \right\} \hat{\xi}_z' + \left\{ \frac{k^2 \sinh^2(z - \frac{Z}{2}) - \omega^2}{\cosh^2(z - \frac{Z}{2})} \right\} \hat{\xi}_z = 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\text{Wobei: } \beta = \frac{\frac{\gamma}{2} \omega^2}{\frac{\gamma}{2} k^2 - \omega^2} \quad (\text{B.23})$$

Wir konzentrieren uns auf die Lösung des generalisierten Eigenwert-

problems (B.22) mit den Randbedingungen $\hat{\xi}_z(0) = \hat{\xi}_z(z) = 0$. Eine wichtige Eigenschaft, die die Struktur des Spektrums bestimmt, ist die Existenz singulärer Punkte, d.h. Stellen, an denen der Vorfaktor von $\hat{\xi}_z$ verschwindet. Für den Bereich $0 < \omega^2 < \frac{1}{2} k^2$ existiert immer ein z , welches diesen Vorfaktor zu Null macht. Wir erhalten daher ein kontinuierliches Spektrum, wobei jeder Wert der Frequenz ω^2 innerhalb des Intervalls $[0, \omega_c^2(0)]$ erreichbar ist; dabei ist:

$$\omega_c^2(z) = \frac{k^2 \sinh^2(z - \frac{z}{2})}{1 + \frac{z}{2} \sinh^2(z - \frac{z}{2})} \quad (\text{B.24})$$

Ferner zeigt die zugehörige Eigenmode $\hat{\xi}_{z_c}(z)$ ein singuläres Verhalten an der Stelle z , für die Gleichung (B.24) gilt, und die Verschiebung ist nicht quadratintegrierbar. Es ist leicht zu zeigen (s. z.B. Goedbloed, 1983), daß $\hat{\xi}_{z_c}(z)$ in der Nähe der Singularität die folgende Gestalt annimmt:

$$\hat{\xi}_{z_c}(z, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} B_l [\omega^2 - \omega_c^2(z)]^l + \sum_{l=1}^{\infty} A_l [\omega^2 - \omega_c^2(z)]^l \ln |\omega^2 - \omega_c^2(z)| \quad (\text{B.25})$$

wobei $A_0 = 1$ ist. Die physikalische Beschreibung der Situation wird im allgemeinen durch eine Überlagerung von allen Eigenmoden bestimmt, indem man die Fourier-Umkehrtransformation von $\hat{\xi}_{z_c}(z, \omega)$ (über das kontinuierliche Spektrum) sowie die diskreten Moden berücksichtigt. Wenn man dann $\hat{\xi}_{z_c}(z, t)$ asymptotisch für $t \rightarrow \infty$ betrachtet, erhält man (s. z.B. Tataronis und Grossman, 1972):

$$\hat{\xi}_{z_c}(z, t) \sim \frac{e^{i\omega_c(z)t}}{t} \quad (\text{B.26})$$

Das kontinuierliche Spektrum führt daher zu stark gedämpften, oszillatorischen Moden. Andererseits folgt aus (B.19), daß die x-Komponente der Verschiebung für $t \rightarrow \infty$ ungedämpft oszilliert:

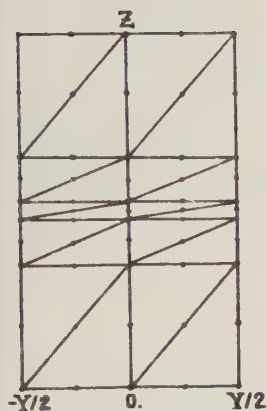
$$\hat{\xi}_x(z, t) \sim e^{i\omega_c(z)t} \quad (\text{B.27})$$

Jeder Punkt im Plasma oszilliert mit seiner eigenen lokalen Fre-

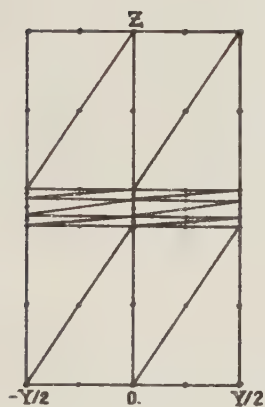
quenz $\omega_c(z)$. Unter diesen Umständen entstehen durchgehend räumliche, starke Fluktuationen, die ihrerseits über Phasenmischung zu nicht linearer Dämpfung der inzwischen unkorrelierten Oszillationen führen (s. z.B. Tatatoris und Grossmann, 1973).

Wenn wir uns auf den Frequenzbereich $\omega^2 > \frac{\gamma}{2} k^2$ beschränken, weist die Differentialgleichung (B.22) ein nicht-singuläres Verhalten auf. Da diese Gleichung vom Sturm-Liouville-Typ ist, bedeutet die Monotonie der Vorfaktoren von $\hat{\xi}_z''$ und $\hat{\xi}_z'$ bezüglich ω^2 , daß der Eigenwert ω^2 mit wachsender Nullstellen-Zahl der Eigenmode anwächst (s. z.B. Ince, 1956). Man hat diesmal ein diskretes Spektrum mit glatten, regulären Eigenmoden. Seboldt (1983) hat mit Hilfe der sogenannten shooting-Methode das Eigenwertproblem (B.22) für mehrere Werte der Wellenzahl k , der Höhe Z und des Adiabatenkoeffizienten γ gelöst.

Zum Vergleich haben wir die Werte $k = 1$, $Z = 10$ und $\gamma = 1,5$ ausgewählt. Es ist bemerkenswert, daß unsere Ergebnisse im wesentlichen unabhängig von der Dicke Y sind; wir haben $Y = 1$ angenommen. Aus der Gleichgewichtsstruktur ist es naheliegend, ein Netz mit möglichst guter Auflösung um $z = Z/2$ zu benutzen. Exemplarisch haben wir zunächst verschiedene Netze mit 20 Elementen benutzt. Dabei handelt es sich um das äquidistante Netz (s. Abb. B.1a) und die in Abb. B.3 dargestellten verschobenen Netze. Das kontinuierliche Spektrum wird als Folge der Diskretisierung durch eine diskrete Anordnung von Eigenwerten dargestellt. Wie viele und welche Eigenwerte ein solches numerisches Spektrum enthält, hängt nur von der Knotenpunkt-Zahl des eingesetzten Netzes ab. Aus der vorigen Analyse erhalten wir als ω^2 -Bereich des Kontinuums für $Z = 10$: $[0, 0,7498]$. Die Tabelle B.3 zeigt die Kontinuumsgranzwerte sowie die ersten fünf diskreten Eigenwerte für die oben erwähnten Netze. Das Netz a) stellt einen



B.3a



B.3b

Abb. B.3: Verschobene Netze mit $K = 2$, $L = 5$: 20 Elemente

Tabelle B.3: Harris-Schicht: Eigenwertspektrum für verschiedene Netze mit 20 Elementen; die verschobenen Netze werden in Abb. B.3 gezeigt; $k = 1$, $Z = 10$, $\mathcal{T} = 1,5$.

Eigenwert	analyt./shoot.Meth.	äquid.Netz	verschob.Netz a)	verschob.Netz b)
$\omega_{c \text{ MIN}}^2$	0	0,3494	0,1396	0,0540
$\omega_{c \text{ MAX}}^2$	0,7498	0,7497	0,7455	0,7362
ω_1^2	1,1651	1,1748	1,1838	1,2118
ω_2^2	4,7052	5,5237	4,9552	5,3048
ω_3^2	9,8760	12,518	10,411	15,214
ω_4^2	16,810	16,810	20,040	34,923
ω_5^2	25,496	53,798	39,029	55,211

Kompromiß zwischen der Auflösung im inneren (Kontinuum bestimmend) und im äußeren (diskretes Spektrum) Bereich dar. Wir erhalten eine prozentuale Abweichung von weniger als 1% für den ersten diskreten Eigenwert. Wenn man die Koordinaten z_1 der Knotenpunkte in der z -Richtung in (B.24) einsetzt, erhält man einen Satz $\{\omega_c^2(z_1)\}$ bevorzugter Frequenzen, nach denen sich das Verfahren zur Bestimmung des kontinuierlichen Spektrums richtet. Für die angewandten Netze erhalten wir neun Eigenwerte des Kontinuums, die in der Nähe von $\omega_c^2(z_1)$ liegen.

Wir haben zusätzlich das Spektrum unter Anwendung eines in sich geschachtelten Netzes mit 16 Elementen (s. Abb. B.4) berechnet. Die Tabelle B.4 stellt vergleichsweise die erhaltenen Spektren für beide Netzarten gegenüber. Das geschachtelte Netz führt nur im diskreten Bereich zu einer leichten Verbesserung gegenüber dem äquidistanten Netz.

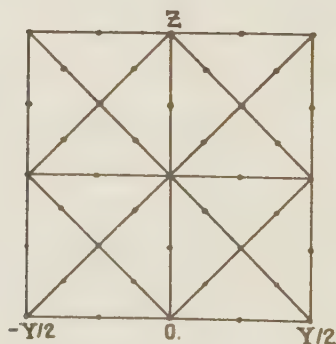


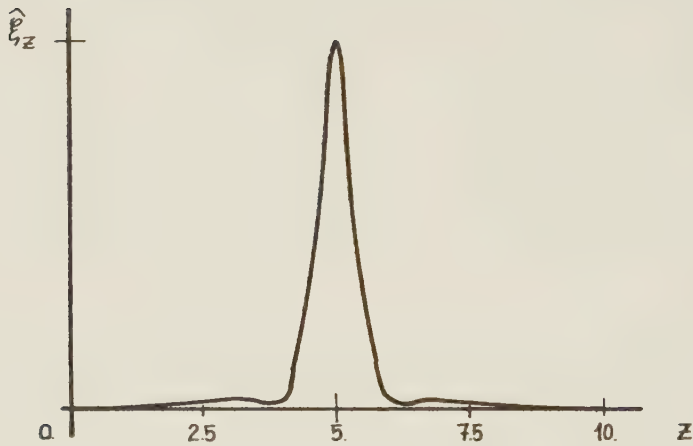
Abb. B.4: In sich geschachteltes Netz mit 16 Elementen.

Tabelle B.4: Harris-Schicht: Eigenwertspektrum für verschiedene Netze mit 16 Elementen; $k = 1$, $Z = 10$, $\vartheta = 1,5$.

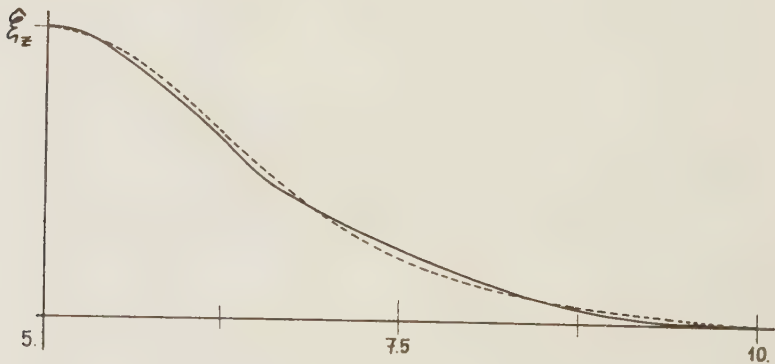
Eigenwert	analyt./shoot.Meth.	äquid.Netz	geschachtelt.Netz
$\omega_{c \text{ MIN}}^2$	0	0,3687	0,4018
$\omega_{c \text{ MAX}}^2$	0,7498	0,7493	0,7483
ω_1^2	1,1651	1,1746	1,1794
ω_2^2	4,7052	6,3635	5,4106
ω_3^2	9,8760	12,3060	10,9695

Die numerischen Eigenmoden weisen im wesentlichen den erwarteten Verlauf auf. Das numerische Verfahren wirkt derart, daß die unbegrenzt wachsenden singulären Moden geglättet werden. Diese deuten jedoch auf Singularitäten in der Nähe der Knotenpunkte z_1 , was dem Resultat anderer Autoren entspricht (s. z.B. Appert et al., 1975). Die Abb. B.5a zeigt die erste singuläre Mode $\hat{\xi}_z$, die zu dem tiefsten Eigenwert im Kontinuum gehört. Die höheren singulären Moden besitzen zwei um $z = Z/2$ symmetrische stark ausgeprägte Maxima. Die diskreten Eigenmoden wurden im allgemeinen gut approximiert. Die Abb. B.5b stellt die erste diskrete Mode $\hat{\xi}_z$ dar; dabei wird sie mit der durch die shooting-Methode gerechneten Mode verglichen (wir haben nur die Hälfte des z -Bereichs gezeigt). Für die höheren diskreten Moden erhalten wir noch gute Übereinstimmung bis zur 5. Eigenmode.

Für die Komponente $\hat{\xi}_x$ bekommen wir stets bis auf Randgebiete den erwarteten Verlauf, d.h. laut (B.19) im wesentlichen die Ableitung von $\hat{\xi}_z$. Die von Seboldt gerechneten Moden $\hat{\xi}_x$ sind am Rand verschieden von Null. Jedoch haben beide Randbedingungen praktisch zu demselben Resultat geführt. Die Erklärung liegt darin, daß sich am Rand eine Grenzschicht bildet. Diesen Effekt konnten wir besonders



B.5a: Erste singuläre Eigenmode, $\omega_{c1}^2 = 0,1396$.



B.5b: Erste reguläre Eigenmode, $\omega_1^2 = 1,1838$.
 — shooting-Methode, ---- Energieprinzip

Abb. B.5: Harris-Schicht: $k = 1$, $z = 10$, $\tau = 1,5$; 20 Elemente,
 verschobenes Netz (Abb. B.3a).

gut bei relativ kleinen Werten von Z erkennen, weil beide Lösungen für große Z zu Null kommen.

B.3 Schallwellen im Gravitationsfeld

Wir betrachten jetzt eine Situation mit konstantem äußeren Gravitationsfeld $\underline{g} = -g\hat{e}_z$. Wir nehmen an, daß kein Magnetfeld vorhanden ist. Ferner setzen wir ein isothermes, nur von z abhängiges Gleichgewicht voraus:

$$p_o = \hat{p}_o e^{-\frac{z}{h_o}} \quad (\text{B.28})$$

$$\rho_o = \hat{\rho}_o e^{-\frac{z}{h_o}} \quad (\text{B.29})$$

wobei $\hat{\rho}_o$, $\hat{p}_o$ und h_o Konstanten sind; h_o bezeichnet die barometrische Skalenhöhe kT_o/mg . Wenn wir erneut die Form (B.2) für $\underline{\xi}$ annehmen, erhalten wir aus (II.16):

$$-\omega^2 \hat{\xi}_x = v_s^2 \left(-k^2 \hat{\xi}_x + ik \frac{\partial \hat{\xi}_y}{\partial y} + ik \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} \right) - igk \hat{\xi}_z \quad (\text{B.30})$$

$$-\omega^2 \hat{\xi}_y = v_s^2 \left(ik \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}_z}{\partial y \partial z} \right) - g \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial y} \quad (\text{B.31})$$

$$-\omega^2 \hat{\xi}_z = v_s^2 \left(ik \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}_z}{\partial z^2} \right) - g(\sigma-1) \left(ik \hat{\xi}_x + \frac{\partial \hat{\xi}_x}{\partial y} \right) - \sigma g \frac{\partial \hat{\xi}_z}{\partial z} \quad (\text{B.32})$$

Dabei ist $v_s = \sqrt{\hat{p}_o / \hat{\rho}_o}$ die konstante Schallgeschwindigkeit. Wir wollen die folgenden wesentlichen Vereinfachungen einführen:

i) Verschiebungen mit unendlich großen Wellenlängen in x -Richtung, d.h. $k = 0$

ii) y -unabhängige Verschiebungen.

Aus (B.30) folgt wegen i) $\hat{\xi}_x = 0$. Andererseits bedeutet (B.31) wegen ii), daß $\hat{\xi}_y = 0$. Wir erhalten aus (B.32) die einzige relevante Gleichung für $\hat{\xi}_z$:

$$v_s^2 \xi_z'' - \gamma g \xi_z' + \omega^2 \xi_z = 0 \quad (\text{B.33})$$

Als Randbedingungen fordern wir $\xi_z'(0) = \xi_z'(z) = 0$. Die Lösung von (B.33), die den Randbedingungen genügt, lautet:

$$\xi_z = A e^{\frac{\gamma g}{2v_s^2} z} \sin k_z z \quad (\text{B.34})$$

wobei A eine Konstante und $k_z = \frac{\pi}{z} n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die zugehörige Dispersionsrelation lautet jetzt:

$$\omega^2 = k_z^2 v_s^2 + \frac{\gamma^2 g^2}{4 v_s^2} \quad (\text{B.35})$$

Wir erhalten stehende dispersive Schallwellen in einem Gravitationsfeld (acoustic-gravity-waves). Ein wichtiger Effekt der Stratifikation ist, daß die Amplitude der Verschiebung mit der Höhe (bis kurz vor der Wand) wächst. Da die Massendichte mit der Höhe abnimmt und deshalb die Flüssigkeitselemente an der Bewegung teilnehmen, muß die zu jedem einzelnen Flüssigkeitselement assoziierte Verschiebung ihre Amplitude vergrößern; damit bleibt die Wellenenergie erhalten.

Für den Vergleich beider Verfahren in diesem Fall führen wir die folgende Normierung ein:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{r}}{h_0}; \quad \tilde{\xi} = \frac{\tilde{\xi}}{h_0}; \quad \tilde{P} = \frac{\tilde{P}}{P_0}; \quad \tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}; \quad \tilde{k} = h_0 \tilde{k}; \quad \tilde{\phi} = \frac{\tilde{\phi}}{h_0 g}; \quad \delta \tilde{W} = \frac{\delta \tilde{W}}{h_0^2 \tilde{P}_0}; \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{h_0 \tilde{\omega}^2}{g} \quad (\text{B.36})$$

Ab jetzt sind die Variablen ohne Schlangel dimensionslos. Wir erhalten für die Eigenmoden (B.34) und das Spektrum (B.35) die folgenden Ausdrücke:

$$\xi_z = C e^{\frac{\gamma}{2} z} \sin k_z z \quad (\text{B.37})$$

$$\omega_n^2 = \gamma \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{z^2} n^2 \right) \quad (\text{B.38})$$

Dabei ist C eine numerische Konstante. Aufgrund der z-Abhängigkeit des Problems ist es angebracht, ein Netz mit möglichst vielen Ele-

menten in der vertikalen Richtung anzuwenden. Jedoch hat es sich herausgestellt, daß die Elementenzahl (K) in y-Richtung Einfluß auf unsere Ergebnisse hat (s. unten). Die Ursache dieses Verhaltens liegt offensichtlich an der zweidimensionalen Natur des numerischen Verfahrens, das wir hier auf eine eindimensionale Situation anwenden. Wir haben exemplarisch $\gamma = 1$ und $Z = 10$ angenommen. Die Ergebnisse sind unabhängig von der Wahl der Dicke Y (wir haben hier $Y = 2,5$ benutzt). Die Tabelle B.5 stellt die ersten fünf analytischen zusammen mit den numerischen Eigenwerten für die verschiedenen Netze dar. Neben den zwei äquidistanten Netzen mit 20 Elementen (s. Abb. B.1a) haben wir auch ein in sich geschachteltes Netz mit 32 Elementen benutzt. Wir erzielen die kleinste prozentuale Abweichung Δ vom analytischen Eigenwert beim geschachtelten Netz (dies entspricht der optimalen Auflösung in beiden Hauptrichtungen).

Tabelle B.5: Schallwellen im Gravitationsfeld: Eigenwertspektrum für verschiedene Netze. Prozentuale Abweichung bei geschachtelten Netz; $\gamma = 1$, $k = 0$, $Z = 10$.

Eigenwert	analytisch	K=2, L=5, M=20	K=1, L=10, M=20	geschacht. Netz M=32	$\Delta(\%)$
ω_1^2	0,3486	0,3524	0,4364	0,3516	0,8
ω_2^2	0,6447	0,6638	0,8131	0,6544	1,4
ω_3^2	1,1382	1,2172	1,4512	1,1753	3,1
ω_4^2	1,8291	2,0938	2,3665	2,0100	9
ω_5^2	2,7174	3,4967	3,5814	3,2731	17

Unser Verfahren beschreibt ebenfalls gut die zugehörigen Eigenmoden. Die Abb. B.6 zeigt exemplarisch die analytische und die numerische erste Eigenmode. Ähnliche Übereinstimmung erhalten wir wenigstens bis zur fünften Eigenmode. Die numerischen Eigenmoden können aus verfahrensbedingten Gründen (Dirichlet-Randbedingungen) nicht exakt y -unabhängig sein. Das numerische Verfahren liefert jedoch bis auf schmale Randgebiete genügend gute Approximation des y -unabhängigen Verlaufs, so daß wir analog zum Harris-Schicht-Fall das Auftreten einer Grenzschicht finden.

Wir können daher auch in der vorliegenden Situation eine hinreichend gute Beschreibung des Eigenwertspektrums sowie der zugehörigen Eigenmoden erzielen.

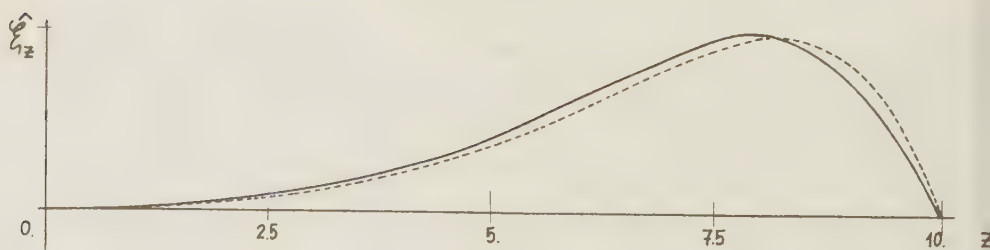


Abb. B.6: Schallwellen im Gravitationsfeld: Erste Eigenmode, in sich geschachteltes Netz mit 32 Elementen; $\mathcal{V} = 1$, $z = 10$, $k = 0$.

— numerisch; ---- analytisch: $\hat{\xi}_z = C_1 e^{z/2} \sin(\frac{\pi}{10} z)$

Anhang C: Die Eigenwertgleichung

Bei unserer Stabilitätsuntersuchung haben wir im Energieprinzip den allgemeinen Fall dreidimensionaler komplexer Verschiebungen zugelassen. Andererseits kann erst die zugehörige Eigenwertgleichung (II.20) ein Kriterium liefern, welches das Auftreten einer solchen allgemeinen Verschiebung bestimmt. Diese Eigenwertgleichung kann auch Information über die Struktur der Verschiebung bei vereinfachten Situationen geben, so daß mögliche Entartung bei der Anwendung des Energieprinzips vermieden werden kann. Wir werden in diesem Anhang diese Situationen sowie den allgemeine Fall näher analysieren. Ferner wollen wir die aufgetretene Entartung im Energieprinzip erläutern.

C.1. Abkopplung der Gleichungen in Sonderfällen

Als Ausgangspunkt werden wir zunächst explizit die Komponenten der Eigenwertgleichung (II.20) aufschreiben. Wir nehmen hier auch die Form (II.32) der komplexen Verschiebung $\underline{\xi}(x,y,z)$ an. Ferner bezeichnen wir die j-te komplexe Komponente von $\underline{\xi}$ als $\hat{\xi}_j + i\hat{\eta}_j$, wobei $\hat{\xi}_j$ der Realteil und $\hat{\eta}_j$ der Imaginärteil der j-Komponente $\hat{\xi}_j$ ($j = x,y,z$) ist. Wir werden ab jetzt die Dächer von den sechs Komponenten der Einfachheit halber nicht mehr schreiben. Nach leichter Umrechnung erhalten wir für zweidimensionale Gleichgewichte:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \zeta_x = & -k \left[\eta_y \frac{\partial P}{\partial y} + \eta_z \frac{\partial P}{\partial z} + \gamma P \left(\frac{\partial \eta_y}{\partial y} + \frac{\partial \eta_z}{\partial z} \right) \right] - k^2 \gamma^2 P \zeta_x + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} \left[-k (B_x \eta_z - B_z \eta_x) - \frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_y \right. \\ & \left. - B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \zeta_z + B_y \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial y} \left[-k (B_x \eta_y - B_y \eta_x) + \frac{\partial B_z}{\partial z} \zeta_y + B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \zeta_z - B_y \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right] \\ & + \frac{B_y}{4\pi} \left[k \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \eta_y + B_z \frac{\partial \eta_y}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \eta_z - B_y \frac{\partial \eta_z}{\partial z} \right) - k^2 (B_y \zeta_x - B_x \zeta_y) + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \zeta_x + 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_y \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \zeta_y - 2 \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} \zeta_z - \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} - B_x \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y \partial z} \\
& + \frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} \zeta_x + \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} + B_z \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial y \partial z} + \frac{B_z}{4\pi} \left[\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial y} \eta_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \eta_x}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial \eta_x}{\partial y} \right. \\
& + B_y \frac{\partial^2 \eta_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial y} \eta_y - \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \eta_y}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \eta_y}{\partial y} - B_x \frac{\partial^2 \eta_y}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \eta_z - 2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \eta_z}{\partial z} \\
& - B_x \frac{\partial^2 \eta_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \eta_x + 2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \eta_x}{\partial z} + B_z \frac{\partial^2 \eta_x}{\partial z^2} + k \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_y + B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial y} \zeta_z \right. \\
& \left. - B_y \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} \right) + k^2 (B_x \eta_z - B_z \eta_x) \Big] \tag{C.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \omega^2 \zeta_y = \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial y} + \zeta_y \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial z} + \zeta_z \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} + \gamma \frac{\partial P}{\partial y} \left[-k \eta_x + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right] \\
& + \gamma P \left[-k \frac{\partial \eta_x}{\partial y} + \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y \partial z} \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial y} \left[-\frac{\partial B_y}{\partial y} \zeta_x - B_y \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \zeta_y + B_x \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} \right. \\
& + \frac{\partial B_x}{\partial z} \zeta_z + B_x \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \zeta_x - B_z \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} \Big] + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \left[-k (B_x \eta_z - B_z \eta_x) \right. \\
& - \frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_y - B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \zeta_z + B_y \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} \Big] + \frac{B_z}{4\pi} \left[k \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \eta_z + B_x \frac{\partial \eta_z}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \eta_x - B_z \frac{\partial \eta_x}{\partial y} \right) \right. \\
& + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \zeta_y + 2 \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + B_z \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \zeta_z - 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} - B_y \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \zeta_y + 2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} \\
& + B_z \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \zeta_z - 2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} - B_y \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} + k \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \eta_x + B_y \frac{\partial \eta_x}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \eta_y - B_x \frac{\partial \eta_y}{\partial z} \right) \Big] \\
& + \frac{B_x}{4\pi} \left[-k \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} \eta_y + B_z \frac{\partial \eta_y}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \eta_z - B_y \frac{\partial \eta_z}{\partial z} \right) + k^2 (B_y \zeta_x - B_x \zeta_y) - \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \zeta_x \right. \\
& - 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} - B_y \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} \zeta_y + 2 \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + B_x \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y \partial z} \zeta_z + \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \\
& + B_x \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial y \partial z} \zeta_x - \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - B_z \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial y \partial z} \Big] \tag{C.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \omega^2 \zeta_z = \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial y} + \zeta_y \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \frac{\partial P}{\partial z} + \zeta_z \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \gamma \frac{\partial P}{\partial z} \left[-k \eta_x + \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right] \\
& + \gamma P \left[-k \frac{\partial \eta_x}{\partial z} + \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \left[\frac{\partial B_z}{\partial z} \zeta_y + B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \zeta_z - B_y \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right. \\
& + k (B_y \eta_x - B_x \eta_y) \Big] + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial B_x}{\partial z} \left[-\frac{\partial B_y}{\partial y} \zeta_x - B_y \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial y} \zeta_y + B_x \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \zeta_z \right. \\
& + B_x \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \zeta_x - B_z \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} \Big] + \frac{B_x}{4\pi} \left[-\frac{\partial^2 B_y}{\partial z \partial y} \zeta_x - \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} - B_y \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial z \partial y} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z \partial y} \zeta_y + \frac{\partial B_x}{\partial y} \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + B_x \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \zeta_z + 2 \frac{\partial B_x}{\partial z} \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} + B_x \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} \\
 & - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \zeta_x - 2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - B_z \frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial z^2} + k \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_y + B_z \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_z - B_z \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} \right) \\
 & + k^2 \left(B_z \zeta_x - B_x \zeta_z \right) + \frac{B_y}{4\pi} \left[-k \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} \zeta_z + B_x \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \zeta_x - B_z \frac{\partial \zeta_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} \zeta_y \right. \\
 & - 2 \frac{\partial B_z}{\partial y} \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} - B_z \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} \zeta_z + 2 \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{\partial \zeta_z}{\partial y} + B_y \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \zeta_y - 2 \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} \\
 & - B_z \frac{\partial^2 \zeta_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \zeta_z + 2 \frac{\partial B_y}{\partial z} \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} + B_y \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} - k \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} \zeta_x + B_y \frac{\partial \zeta_x}{\partial z} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \zeta_y \right. \\
 & \left. - B_x \frac{\partial \zeta_y}{\partial z} \right) + g \left[-k \vartheta \zeta_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \zeta_y + \vartheta \frac{\partial \zeta_y}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \zeta_z + \vartheta \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \right] \quad (C.3)
 \end{aligned}$$

Die obigen Gleichungen entsprechen dem Realteil jeder Komponente von (II.20). Um die übrigen drei Gleichungen zu erhalten, müssen wir nur die Variablen in (C.1) - (C.3) auf die folgende Weise ersetzen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_j &\longrightarrow \eta_j \\ \eta_j &\longrightarrow -\zeta_j \end{aligned} \right\} \quad \text{für } j = x, y, z \quad (C.4)$$

Wir betrachten von diesen sechs Gleichungen her die folgenden Sonderfälle:

(i) Zweidimensionale Verschiebungen (d.h. $k = 0$): In diesem Fall bekommen wir zwei identische Differentialgleichungssysteme für den Realteil $((\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z))$ und den Imaginärteil $((\eta_x, \eta_y, \eta_z))$ der Verschiebung $\underline{\xi}(y, z)$ mit reellen Koeffizienten. Das gilt für beliebiges Magnetfeld $\underline{B}$ (Fall $B_x = 0$ s. unten). Wir können daher bei der Anwendung im Energieprinzip $\underline{\xi}(y, z)$ als rein reell oder rein imaginär voraussetzen.

(ii) Dreidimensionale Verschiebungen bei $B_x \equiv 0$: Wir erhalten jeweils das gleiche Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen der Form $\underline{\xi}(y, z) = i\eta_{x-x}^e + \zeta_{y-y}^e + \zeta_{z-z}^e$ bzw.

$\underline{\xi}(y, z) = -\xi_x e_x + i\eta_y e_y + i\eta_z e_z$. Folglich kann man bei der Abwesenheit eines Achsenfeldes die allgemeine Verschiebung durch drei Variablen beschreiben, wobei ihre Komponente entlang der x-Achse ξ_x rein imaginär (reell) und ihre senkrechte Komponente ξ_1 rein reell (imaginär) angenommen werden kann.

- (iii) Zweidimensionale Verschiebungen bei $B_x \equiv 0$: In den bei (i) gefundenen Differentialgleichungssystemen entkoppeln sich jetzt die Gleichungen für ξ_x und η_x von den beiden anderen im jeweiligen System. Die allgemeine Lösung entspricht daher einer Verschiebung entweder der Form $\underline{\xi}(y, z) = \xi_x e_x$ oder $\underline{\xi}(y, z) = \xi_y e_y + \xi_z e_z$, wobei alle Komponenten rein reell oder rein imaginär angenommen werden können.
- (iv) Achsenfeld $B_x \neq 0$ mit $B_y = B_z = 0$: Bei dreidimensionalen Verschiebungen erhalten wir auch hier zwei gleiche Differentialgleichungssysteme für die zwei Verschiebungsklassen, die in (ii) gefunden wurden. Die allgemeine Verschiebung in diesem Fall kann daher auch hier durch drei Variablen dargestellt werden. Für zweidimensionale Verschiebungen ($k = 0$) erhalten wir zwei identische Differentialgleichungssysteme für jeweils beide Teile der Komponenten ξ_y und ξ_z , so daß die allgemeine Verschiebung keine Komponente in x-Richtung aufweist. Wir können daher $\underline{\xi} = \xi_y e_y + \xi_z e_z$ mit beiden Komponenten entweder rein reell oder rein imaginär annehmen.

Der Fall dreidimensionaler komplexer Verschiebungen liegt offensichtlich vor, wenn die drei Komponenten des Magnetfeldes $\underline{B}$ ver-

schieden von Null sind. Wir brauchen dann zur Beschreibung der Verschiebung sechs Variablen.

C.2. Entartung im Energieprinzip

Wenn wir das Energieprinzip bei Anwendung dreidimensionaler komplexer Verschiebungen in den oben erläuterten Sonderfällen auswerten, erhalten wir stets eine zweifache Entartung. Jedoch kann man immer diese Entartung vermeiden, indem man die oben gezeigte vereinfachte Form der Verschiebung für den jeweiligen Fall benutzt. Dadurch entsteht eine erheblich Rechenzeiterparnis, so daß eine deutliche Erhöhung der Rechengenauigkeit möglich wird.

Für den allgemeinen Fall bekommen wir ebenfalls diese zweifache Entartung. Wir können sie diesmal jedoch nicht aufheben, weil zwischen den Komponenten beider entarteten Verschiebungen keine einfache Beziehung besteht. Aus (C.4) folgt sofort, daß die Entartung einer Phasenverschiebung $\pi/2$ entlang der x-Achse entspricht. Aus diesem Grund können wir in diesem Fall das Energieprinzip nicht so genau wie in den Sonderfällen auswerten.

Literatur

- Anzer, U., 1969, Solar Phys. 8, 37
- Anzer, U., 1978, Physics of Solar Prominences, IAU Coll., No. 44,
322
- Anzer, U. und Tandberg-Hanssen, E., 1970, Solar Phys. 11, 61
- Appert, K., Berger, D., Gruber, R. und Rappaz, J., 1975, J. Comput.
Phys. 18, 284
- Bashkirtsev, V.S., Kobanov, N.I. und Mashnich, G.P., 1982, Sov.
Astron. Lett. 8(1), 53
- Bernstein, I.B., Frieman, E.A., Kruskal, M.D. und Kulsrud, R.M.,
1958, Proc. Roy. Soc. London A 244, 17
- Birn, J., Goldstein, H. und Schindler, K., 1978, Solar Phys. 57, 81
- Birn, J. und Schindler, K., 1981, in Priest, E.R. (Editor), Solar Flares
Magnetohydrodynamics, Gordon and Breach, New York
- Brown, A., 1958, Astrophys. J. 128, 646
- Courant, R. und Hilbert, D., 1963, Methods of Mathematical Physics,
Volume II, p. 369, New York
- Cowling, T.G., 1957, Magnetohydrodynamics, Interscience Press, New
York
- de Jager, C., 1959, Handbuch der Physik 52, 80
- Dolginov, A.Z. und Ostryakov, 1980, Sov. Astron. 24, 749
- Dungey, J.H., 1953, Month. Not. Roy. Astron. Soc. 113, 180
- Engvold, O. und Rustad, B.M., 1974, Solar Phys. 35, 409
- Galindo, T.J. und Schindler, K., 1984, Astrophys. J.,
277, 422
- Goedbloed, J.P., 1983, Lecture Notes on Ideal MHD, Rijnhuizen Report
83 - 145
- Goedbloed, J.P. und Dagazian, R.Y., 1971, Physical Review A 4, 1554

- Goedbloed, J.P. und Hagebeuk, H.J.L., 1972, Phys. Fluids 15, 1090
- Goldstein, H., 1981, Dissertationsarbeit, Ruhr-Universität Bochum
- Grossi Gallegos, H. und Machado, M.E., 1973, Solar Phys. 31, 427
- Hain, K., Lüst, R. und Schlüter, A., 1957, Z. Naturforschg. 12a, 833
- Harris, E.G., 1962, Il Nouvo Cimento 23, 115
- Hyder, Ch.L., 1967, Solar Phys. 2, 49
- Ince, E.L., 1956, Ordinary Differential Equations, Dover, New York
- Jefferies, J.T. und Orrall, F.Q., 1963, Astrophys. J. 137, 1232
- Kadomtsev, B.B., 1966, Reviews of Plasma Physics 2, 153
- Kleczeck, J., 1963, Bull Astron. Inst. Czech. 14, 86
- Kleczeck, J. und Kuperus, M. 1969, Solar Phys. 6, 72
- Kippenhahn, R. und Schlüter, A., 1957, Z. f. Astrophys. 43, 36
- Krall, N.A. und Trivelpiece, A.W., 1973, Principles of Plasma Physics, McGraw-Hill, New York
- Kuperus, M. und Tandberg-Hanssen, E., 1967, Solar Phys. 2, 39
- Laval, G., Mercier, C. und Pellat, R., 1965, Nuclear Fusion 5, 156
- Lemke, H., 1913, Journal f. Reine und angewandte Mathematik 142, 118
- Lerche, I. und Low, B.C., 1980, Solar Phys. 67, 229
- Lerche, I. und Low, B.C., 1981, Solar Phys. 69, 327
- Leroy, J.L., 1977, Astron. Astrophys. 60, 79
- Leroy, J.L., 1978, Astron. Astrophys. 64, 247
- Low, B.C., 1975, Astrophys. J. 197, 251
- Low, B.C., 1981, Astrophys. J. 246, 538
- Malherde, J.M., Schmieder, B., Ribes, E. und Mein, P., 1983, Astron. Astrophys. 119, 197
- Menzel, D.H., 1951, Proceedings of the Conference on Dynamics of Ionised Media at University College, London
- Migliuolo, S., 1982, J. Geophys. Res. 87, 8057
- Mikhailovskii, A.B., 1974, Theory of Plasma Instabilities, Volume 2, Consultants Bureau, New York

- Nakagawa, Y., 1970, Solar Phys. 12, 419
- Nakagawa, Y. und Mc Kim Malville, J., 1969, Solar Phys. 9, 102
- Pikel'ner, S.B., 1971, Solar Phys. 17, 44
- Priest, E.R., 1978, Solar Phys. 58, 57
- Priest, E.R. und Smith, E.A., 1979, Solar Phys. 64, 267
- Pustil'nik, L.A., 1974, Sov. Astron. 17, 763
- Ramsey, H.E. und Smith, S., 1966, Astron. J. 71, 197
- Rust, D.M., 1966, Ph. D. Diss., University of Colorado
- Sakai, J. und Nishikawa, K.I., 1983, Solar Phys. 88, 241
- Seboldt, W., 1983, private Mitteilung
- Shafranov, V.D., 1957, J. Nuclear Energy II, 5, 86
- Shafranov, V.D., 1959, Plasma Physics and the Problem of Controlled
Thermonuclear Reactions, Vol. II, 1959
- Schindler, K. und Soop, M., 1969, Phys. Fluids 11, 1192
- Schindler, K., Pfirsch, D. und Wobig, H., 1973, Plasma Phys. 15, 1165
- Schindler, K., Birn, J. und Janicke, L., 1983, Solar Phys. 87, 103
- Schuurman, W., Bobeldijk, C. und de Vries, R.F., 1969, Plasma Phys.
11, 495
- Schwarz, H.R., 1980, Methode der finiten Elemente, Taubner, Stuttgart
- Spicer, D.S., 1978, Physics of Solar Prominences, IAU Colloquium
No. 44, 307
- Tandberg-Hanssen, E., 1974, Solar Prominences, Reidel, Dordrecht/
Boston
- Tasso, H., 1975, Plasma Phys. 17, 1131
- Tataronis, J. und Grossmann, W., 1972, Proc. of the 2th Topical
Conf. on Pulsed high β -Plasmas, IPP-Report 1/127, Garching
- Tataronis, J. und Grossmann, W., 1973, Z. für Physik 261, 203
- Tayler, R.J., 1957a, Proc. Phys. Soc. (London) B70, 31
- Tayler, R.J., 1957b, Proc. Phys. Soc. (London) B70, 1049

- Waldmeier, M., 1938, Z. f. Astrophys. 15, 299
- Walker, G.W., 1915, Proc. Roy. Soc. A91, 410
- Zienkiewicz, O.C., 1977, The finite element method in engineering
science, London
- Zweibel, E.G., 1981, Astrophys. J. 249, 731
- Zweibel, E.G., 1982, Astrophys. J. 258, L53
- Zweibel, E.G. und Hundhausen, A.J., 1982, Solar Phys. 76, 261

Lebenslauf

Geboren: 21. 5. 1952 in Zacatlán, Mexiko

Eltern: Isidoro Galindo Herrera,
Diplomlandwirt
María Trejo de Galindo

Ehefrau: María Esther Villavicencio de Galindo
(seit 26. 12. 1973)

Kinder: María Xochitl Galindo Villavicencio
(24. 8. 1981)

Schulbesuch: Escuela Primaria Matilde Acosta/
Mexiko Stadt:
1958 - 1964
Escuela Secundaria No. 59/
Mexiko Stadt:
1965 - 1967
Escuela Vocacional No. 4, Instituto
Politécnico Nacional/Mexiko Stadt:
1968 - 1969

Studium der Physik: Escuela Superior de Física y
Matemáticas, Instituto Politécnico
Nacional/Mexiko Stadt: 1970 - 1973
(Licenciado en Física y Matemáticas)

Thema der Arbeit: "Zur Erzeugung der Ionenkomponente
der solaren kosmischen Strahlung"
(in Spanisch)

Aufbaustudium: Facultad de Ciencias, Universidad
Nacional Autónoma de México/
Mexiko Stadt: 1974

Lehrtätigkeit: Escuela Superior de Ingeniería
Mecánica y Eléctrica, Instituto
Politécnico Nacional/Mexiko Stadt:
1974

Wissenschaftliche Hilfskraft: Instituto de Astronomía, Universidad
Nacional Autónoma de México/ Mexiko
Stadt: 1975

Stipendium: Deutscher Akademischer Austauschdienst
für Aufbaustudium und Promotion an
der Ruhr-Universität Bochum:
1976 - 1981

Wissenschaftlicher Mitarbeiter: Lehrstuhl für Theoretische Physik IV,
Ruhr-Universität Bochum, seit dem
1. 7. 1981

